



Université Cheikh Anta-Diop de Dakar  
École Doctorale Mathématiques-Informatique  
(EDMI)

**Titre :** Résolution libre sur les entiers et Bases de Gröbner-Shirshov sur les DA-anneaux  
**Soda Diop**

**Date de soutenance :** 11 juin 2022

**Résumé**

— Dans cette thèse, nous avons été amenés à contribuer sur deux thèmes : le calcul de résolution libre sur les entiers et celui des bases de Gröbner-Shirshov sur les DA-anneaux.

1. Le calcul des résolutions libres sur des corps sont déjà faites avec les bases de Gröbner mais leur calcul sur des anneaux reste un grand challenge. Dans cette thèse, nous avons contribué sur le cas des entiers relatifs pour certains types d'idéaux.

Soit  $R = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  un anneau de polynômes sur les entiers, et un idéal  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  de  $R$ , nous revisitons la méthode introduite dans les travaux de I. Yengui pour le calcul de bases de Gröbner spéciales de  $I$  dans  $R$ . Dans ce travail les bases de Gröbner spéciales sont des bases Gröbner fortes pour l'idéal localisé  $S^{-1}I$  pour une partie multiplicative scindée  $S$ . Cette notion nous permet d'introduire le concept de  $\mathbb{Z}$ -idéal  $\mathbb{Z}(I)$  de  $I$  qui est un idéal propre de  $R$  et nous proposons une technique de calcul de base de Gröbner faible pour  $\mathbb{Z}(I)$ . Ce résultat est central et mène au calcul d'une résolution minimale pour  $\mathbb{Z}(I)$  en tant que  $R$ -module.

2. L'étude des bases de Gröbner sur un DA-anneau a été introduite par Kapur et Cai en 2009 (Mathematics in Computer Science), où l'ensemble des monômes est un monoïde commutatif, et un algorithme pour calculer les bases de Gröbner commutatives a été donné. En 2013, Bokut *et al.* ont proposé un algorithme de Gröbner-Shirshov sur un corps où l'ensemble de monômes (commutatif ou non) est un semi-anneau. Le travail de Bokut *et al.* a été généralisé par Diop *et al.* sur un anneau de valuation en 2020.

Nous avons adapté cette approche aux D-A anneaux. Comparés aux bases de Gröbner classiques, les résultats de cette investigation donnent une double extension des bases de Gröbner :

- une extension sur les monômes qui sont munis d'une structure de semi-anneau ;
- une extension sur les coefficients qui sont munis d'une structure d'anneau muni d'ordre représentable.

— **MSC2020-Mathematis Subject Classification System :** 16Z05, 16Z10,13D02

**Abstract**

— In this thesis, we were brought to contribute on two topics : the computation of free resolution on the integers and the computation of Gröbner-Shirshov bases on DA-rings.

1. The computation of free resolutions on fields are already made with the Gröbner bases but their computation on rings remains a big challenge. In this thesis, we have contributed on the case of integers for certain types of ideals.

Let  $R = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  a polynomial ring with integers coefficients, and  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  an ideal of  $R$ , we revisit the method introduced in the works of I. Yengui for the computation of special Gröbner bases of  $I$  in  $R$ . In this work the special Gröbner bases are strong Gröbner bases for the localized ideal  $S^{-1}I$  for a split multiplicative part  $S$ . This notion allows us to introduce the concept of  $\mathbb{Z}$ -ideal  $\mathbb{Z}(I)$  of  $I$  which is a proper ideal of  $R$  and we propose a technique to compute weak Gröbner basis for  $\mathbb{Z}(I)$ . This result is central and leads to the computation of a minimal resolution for  $\mathbb{Z}(I)$  as an  $R$ -module.

2. The study of Gröbner bases on a DA-ring was introduced by Kapur and Cai in 2009 (Mathematics in Computer Science), where the set of monomials is a commutative monoid, and an algorithm to compute the commutative Gröbner bases has been given. In 2013, Bokut *et al.* proposed a Gröbner-Shirshov algorithm over a field where the set of monomials (commutative or not) is a semi-ring. The work of Bokut *et al.* was generalized by Diop *et al.* to a valuation ring in 2020.

We have adapted this approach to DA-rings. Compared to classical Gröbner bases, the results of this investigation give a double extension of the Gröbner bases :

- an extension on monomials which are endowed with a semi-ring structure ;
- an extension on the coefficients which are endowed with a ring structure with representable order.

— **MSC2020-Mathematis Subject Classification System :** 16Z05, 16Z10,13D02