UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ ?? 08 G 18bis A 02

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION PROPOSEE PAR LES AUTEURS

EXERCICE 1 (04 points)**.** Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, -1$ et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c, où a, b, c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1. Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X. **1 pt**

2. Soient A, B, C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ).

a. Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\big\{(A,1);(B,2);(C,4)\big\}$. **1 pt**

b. On pose : $\varphi(M) = \dfrac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$. **1 pt**

c. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$. **1 pt**

EXERCICE 2 (04 points)**.** Soit f la fonction définie sur $[1, +8[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

En utilisant la fonction f, on se propose de déterminer la limite de la suite de terme général $Sn = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Soit k un entier non nul. Etablir les relations suivantes :

a. $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k+1}$.

b. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - f(k)$.

2. a. Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ **0,25 pt**

b. Soit $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+1)} = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

Calculer U_n en fonction n et déterminer $\displaystyle\lim_{\mapsto +\infty} U_n$. **0,5+0,25=0,75 pt**

c. Déduire des résultats de la question (1) que : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq U_n$.

Déterminer alors $\displaystyle\lim_{\mapsto +\infty} \sum_{k=n}^{2n} = f(k)$. **0,5+0,5=1 pt**

d. Montrer que

$f(k) = S_n - \ln \dfrac{2n+1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$. **0,5+0,5=1 pt**

EXERCICE 3 (04 points)**.** Le plan est orienté. PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de $[QR]$ et $[RP]$. Q_1 est le symétrique de Q par rapport à J.

1. Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose $f = t \circ r$.

a. Faire une figure.

Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q. **1 pt**

b. Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R. **0,25+0,25=0,5 pt**

c. Donner la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. En déduire la nature du triangle IPP' . **0,25+0,25+0,5=1 pt**

2. Soit s la similitude directe telle $s(J) = P$ et $s(R) = I$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(I) = P'$. **0,5 pt**

b. Soit Ω le centre de s. Montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et les points Ω, P, J et Q_1 d'autre part sont cocycliques.

En déduire la position de Ω puis construire ce point. **0,25+0,25+0,5=1 pt**

PROBLEME (08 points)**.**

1. Soit l'équation différentielle :

$(E_m) : my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.

a. Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E_m). **1 pt**

b. Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonn ées $(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$. **0,5 pt**

2. Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un rep‘ere orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). **1 pt**

3. Soit g le prolongement à $\mathbb{R}$ de f.

a. Comparer $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g. **0,5 pt**

b. On pose $u(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives. respectives et (G) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part, à (G) et (C_v) d'autre part ?

0,25+0,25 =0,5 pt

c. Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont même tangente.

0,25+0,25 =0,5 pt

d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. (On fait remarquer que : $-1 = \cos t = 1$). **0,25 pt**

4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)\, dt$.

a. Calculer a_k. (On pourra faire deux fois une intégration par parties.) **0,5 pt**

b. Pour tout réel n on pose et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |ak|$.

Montrer que la suite (s_n) admet une limite.

Interpréter géométriquement ce résultat. **0,5+0,25 =0,75 pt**

5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée. (Λ) définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) &= e^{-t}\cos t \\ y(t) &= e^{-t}\sin t \end{cases} \text{ ; pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

a. Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau des variations conjointes.

0,75 pt

b. Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\overrightarrow{V}_t$ le vecteur dérivé lui correspondant.
Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}_t$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM}_t, \overrightarrow{V}_t)$ est constant.

0,5+0,5 =1 pt

c. Représenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points de paramètres $-\frac{\pi}{2}$ et 0

0,25+0,25+0,25 =0,75 pt

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. a. En désignant par b le terme central de la progression arithmétique et par r sa raison, on peut écrire : $a = b - r$ et $c = b + r$.

Les autre données se traduisent alors par :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\{-1,1,2\}} p(X=k) &= 1 \\ E(X) &= 1 \end{cases} \text{ c'est à dire } \begin{cases} e^a + e^b + e^c &= 1 \\ 1.e^a - 1.e^b + 2.e^c &= 1 \end{cases} \text{ Soit } \begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r &= 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r &= 1 \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre et en simplifiant par e^b, on trouve $e^r = 2$ soit $r = \ln 2$.

La première équation devient alors :

$(\frac{1}{2} + 1 + 2)e^b = 1$ c'est à dire $e^b = \frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{b = \ln\frac{2}{7}}$.

Ensuite $a = b - r = \ln\frac{2}{7} - \ln 2 \Rightarrow \boxed{a = \ln\frac{1}{7}}$ et $c = b + r = \ln\frac{2}{7} + \ln 2 \Rightarrow \boxed{c = \ln\frac{4}{7}}$.

Pour calculer la variance, calculons d'abord $E(X^2)$.

$E(X^2) = 1^2 e^a + (-1)^2 e^b + 2^2 e^c = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + 4\frac{4}{7} = \frac{19}{7}$.

Alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{19}{7} - 1 \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{12}{7}}$.

2. a. $x_G = \frac{1}{7}(1.x_A + 2x_B + 4x_C) = 1$ donc $G = A$.

b. $\varphi(G) = \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2\right]$.

Soit, en se souvenant que $G = A$:

$\varphi(G) = \frac{1}{7}\left[2\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AC}^2\right] = \frac{1}{7}(2.4 + 4.1) \Rightarrow \boxed{\varphi(G) = \frac{12}{7} = V(X)}$.

On peut écrire en utilisant la relation de Schales et en développant :

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}\left[(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2\right]$$

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}) + 4(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC})\right]$$

$$\varphi(M) = \overrightarrow{MG}^2 + \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2\right] + \frac{1}{7}.2\overrightarrow{MG}.\left[\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC}\right].$$

Le troisième du second membre est nul parce que G est le barycentre du système $\Big[(A,1),\ (B,2),\ (C,4)\Big]$.
Donc, $\varphi(M) = \overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$.

La relation $\varphi(G) = 3$ est alors équivalente à : $\overrightarrow{MG}^2 = \dfrac{9}{7}$ ou $MG = 3\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Par conséquent

$\boxed{(\Gamma) = \big\{M_1, M_2\big\} \text{ où } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont les deux points de } (\Delta)}$

$\boxed{\text{dont la distance au point } A \text{ est } -3\dfrac{\sqrt{7}}{7} \text{ et } 3\dfrac{\sqrt{7}}{7}}$

Correction de l'exercice 2.

1. a. On a, pour tout réel x compris entre k et $k+1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$.

Puis en intégrant : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx.$

c'est à dire $\displaystyle \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}.$

b. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k = \ln\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k} - f(k).$

2. a. En réduisant le deuxième membre au même dénominateur, on obtient :
$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$

Donc a et b sont tels que $\forall x \neq 0$ et -1, $(a+b)x + a = 1$. Alors $a+b = 0$ et $a = 1$; ce qui entraîne $b = -1$.

Par conséquent $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

3. a. On a $\displaystyle U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{2n}\Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big] = \sum_{k=n}^{2n}\Big[\alpha_k - \alpha_{k+1}\Big]$ avec $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$.

Donc en procédant à une ittération : $\boxed{U_n = \alpha_n - \alpha_{2n+1} = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}}$. Ensuite $\boxed{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 0}$.

b. Dans les inégalités de la question **1.a.**, remplaçons l'intégrale par sa valeur tirée de la question **1.b.**

$\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{k} - f(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

ce qui permet d'encadrer $f(k)$:

$0 \leq f(k) \leq \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Puis sommons membre à membre ces inégalités depuis $k = n$ à $2n$, on obtient la relation demandée :

$\displaystyle 0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = U_n$

Comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0}$.

c. La relation établie dans la question **1.b.** donne par sommation :

$$\sum_{k=n}^{2n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$$

ou en faisant intervenir la relation de Schales pour les intégrales :

$$\int_n^{2n+1}\frac{dx}{x}=S_n-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$$

Ensuite en intégrant :

$$\ln(k+1)-\ln k=S_n-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}f(k)=S_n-\ln\frac{2n+1}{n}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)=0$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2$, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}S_n=\ln 2}$

Correction de l'exercice 3.

1. a. Le point P' est tel que
$f(P)=t\circ r(P)=t(P)=P'$.
Donc le point P' est entièrement défini par la relation $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{JQ}$;
$\boxed{P' \text{ est tel que } JPP'Q \text{ soit un parallélogramme}}$.
Le point Q' est tel que
$f(Q)=t\circ r(Q)=t(R)=Q'$.
Donc le point Q' est entièrement défini par la relation $\overrightarrow{RQ'}=\overrightarrow{JQ}$;
$\boxed{Q' \text{ est tel que } JQQ'R \text{ soit un parallélogramme}}$.

La droite (IJ) est une droite des milieux pour le triangle PQR, donc JIR a même nature que PQR :
$\boxed{JIR \text{ est équilatéral direct}}$

La droite (JQ) est la médiatrice du segment $[P,R]$ parce que le triangle PQR est équlatérale. Donc, puisque J est le milieu de $[Q,Q_1]$, l'image PQ_1R du triangle équilatérale direct PQR par la symétrie orthogonale d'axe (PR) est un triangle équilatérale indirect.

r est la rotation de centre P et d'angle $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=\frac{\pi}{3}$. Donc $r(R)=Q_1$.

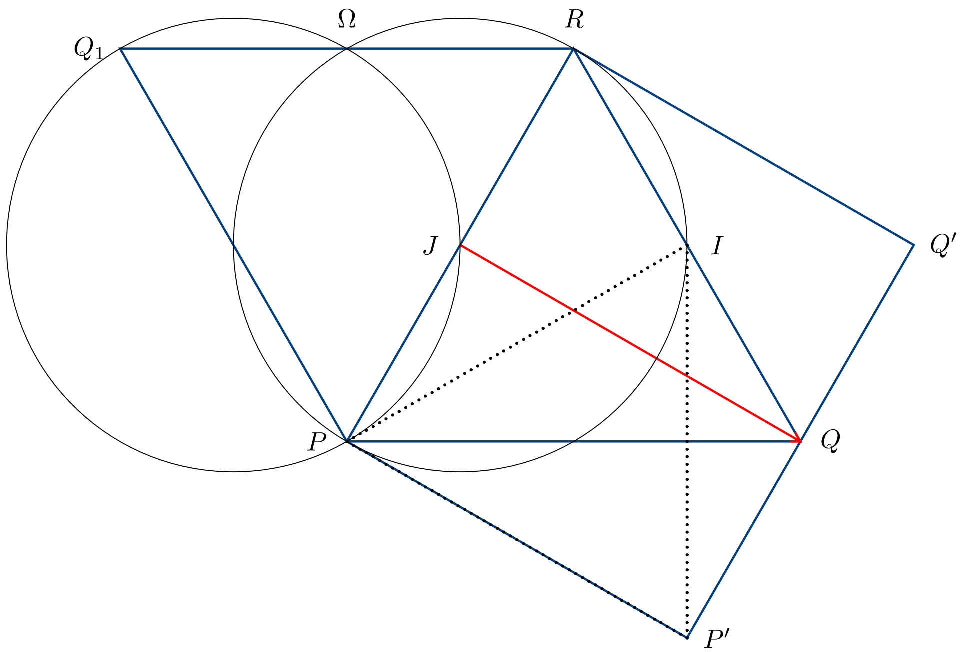
Ensuite, $f(R)=t\circ r(R)=t(Q_1)=J\Rightarrow\boxed{f(R)=J}$.

On sait que $f=t\circ r$ est une rotation de même angle que r c'est à dire $\frac{\pi}{3}$.

La relation $f(R)=J$ et JIR est équilatéral direct entraîne que le centre de f est I.

$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } I \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$

On en déduit, puisque $f(P)=P'$ que $\boxed{\text{le triangle } IPP' \text{ est équilatéral direct}}$.



2.

Antécédent	Ω	J	R	I
Image par s	Ω	P	I	P'

a. L'angle de s est $(\overrightarrow{JR},\overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PJ},\overrightarrow{PI})$ $\boxed{\text{L'angle de } s \text{ est } -\dfrac{\pi}{6}}$

Le rapport de s est $\dfrac{PI}{JR}$. Or $PI = PR\cos\dfrac{\pi}{6} = 2JR\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\boxed{\text{le rapport de } s \text{ est } \sqrt{3}}$.

On a $(\overrightarrow{RI},\overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ},\overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ},\overrightarrow{IP}) + (\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IP'}) = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$ angle de s.

$\dfrac{IP'}{RI} = \dfrac{IP}{RI} = \sqrt{3}$ rapport de s.

Les trois conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} s(R) & = & I \\ (\overrightarrow{RI},\overrightarrow{IP'}) & = & \text{angle de } s \\ \dfrac{IP'}{RI} & = & \text{rapport de } s \end{array}\right. \quad \text{suffisent pour dire que } s(I) = P'$$

b. Puisque les similitudes planes directes conservent les angles, on peut lire dans le tableau précédent que : angle de $s = (\overrightarrow{\Omega R},\overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{JR},\overrightarrow{PI})$.

Or $(\overrightarrow{JR},\overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PI})$ parce que le point J appartient au segment $[P,R]$.

Donc $(\overrightarrow{\Omega R},\overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PI})$

et comme les quatre points Ω, R, P et I ne sont pas alignés, ils sont cocycliques.

De même $-\dfrac{\pi}{6}$ = angle de $s = (\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega P})$.

D'un autre côté, la droite (Q_1J) étant la bissectice du triangle équilatérale indirect PQ_1R, l'angle $(\overrightarrow{Q_1J},\overrightarrow{Q_1P})$ vaut $-\dfrac{\pi}{6}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega P}) = (\overrightarrow{Q_1 J}, \overrightarrow{Q_1 P})$ puis que les points Ω, J, P et Q_1 sont cocycliques

En résumé, le point Ω appartient à l'intersection des deux cercles C_1 et C_2 ; où C_1 est le cercle contenant les points P, I et R et C_2 le cercle contenant les points P, J et Q_1.

De plus le point Ω est différent de P parce que Ω est fixé par s et P non.

Ces conditions définissent parfaitement le point Ω

Correction du problème.

1. a. Nous sommes en présence d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants de degré un ou deux selon que m est égal à 0 ou non.

L'équation caractéristique est :

$$(E_m^c) : \quad mr^2 + 2r + 2 = 0$$

- Si $m = 0$, (E_m^c) est une équation du premier degré. Sa seule racine est $r_0 = -1$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = k\mathrm{e}^{-t}$, k constante réelle.
- Si $m \neq 0$, (E_m^c) est une équation du second degré dont le discriminant réduit est $\Delta' = 1 - 2m$.

* Si Δ' est égal à 0 c'est à dire $m = \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a une racine double $r_0 = -\dfrac{1}{m} = -2$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = (at + b)\mathrm{e}^{-2t}$, a et b constantes réelles.

* Si Δ' est > 0 c'est à dire $m < \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a deux racines réelles simples $r_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 2m}}{m}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - 2m}}{m}$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = a\mathrm{e}^{r_1 t} + b\mathrm{e}^{r_2 t}$, a et b constantes réelles.

* Si Δ' est < 0 c'est à dire $m > \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a deux racines complexes simples conjuguées $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2m - 1}}{m} = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{2m - 1}}{m} = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{m}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{2m - 1}}{m}$.

La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = \mathrm{e}^{\alpha t}(a\cos\beta t + b\sin\beta t)$, a et b constantes réelles.

b. Notons h la solution de (E_1) dont la courbe passe par le point A et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

On doit alors avoir $h(0) = 1$ et $h'(0) = -1$.

Ici $m = 1$ est $>$ à $\dfrac{1}{2}$, donc h s'écrit : $h(t) = \mathrm{e}^{-t}(a\cos t + b\sin t)$, a et b constantes réelles.

$h'(t) = \Big[(b - a)\cos t - (b + a)\sin t\Big]\mathrm{e}^{-t}$.

Les conditions satisfaites par h deviennent :

$h(0) = a = 1$ et $h'(0) = b - a = -1$ c'est à dire $a = 1$ et $b = 0$, puis $\boxed{h(t) = \cos t\ \mathrm{e}^{-t}}$

2. La fonction f est continue et dérivable dans $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in I,\ f'(t) = -(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^{-t}$ (déjà calculé dans la question précédante).

L'équation $\cos t + \sin t = 0$ est équivalente à $\cos(t - \dfrac{\pi}{4}) = 0$. Ses solutions dans $\mathbb{R}$ sont telles que $t - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ soit $t = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de cette équation dans I sont alors $t_0 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $t_1 = -\dfrac{\pi}{4}$.

Cette équation et la dérivée f' ont les mêmes zéro.

Pour déterminer le signe de f' on peut résoudre des inéquations trigonométriques.

Mais on peut aussi dire que dans tout intervalle où f' ne s'anulle pas, elle garde un signe constant parce qu'elle est continue. C'est une application très pratique du théorème des valeurs intermédiaires.

$-\frac{\pi}{3}$ appartient à l'intervalle $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(-\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})e^{\frac{\pi}{3}}$ est > 0, donc f' est > 0 dans I_1.

0 appartient à l'intervalle $I_2 = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $f'(0) = -1$ est < 0, donc f' est < 0 dans I_2.

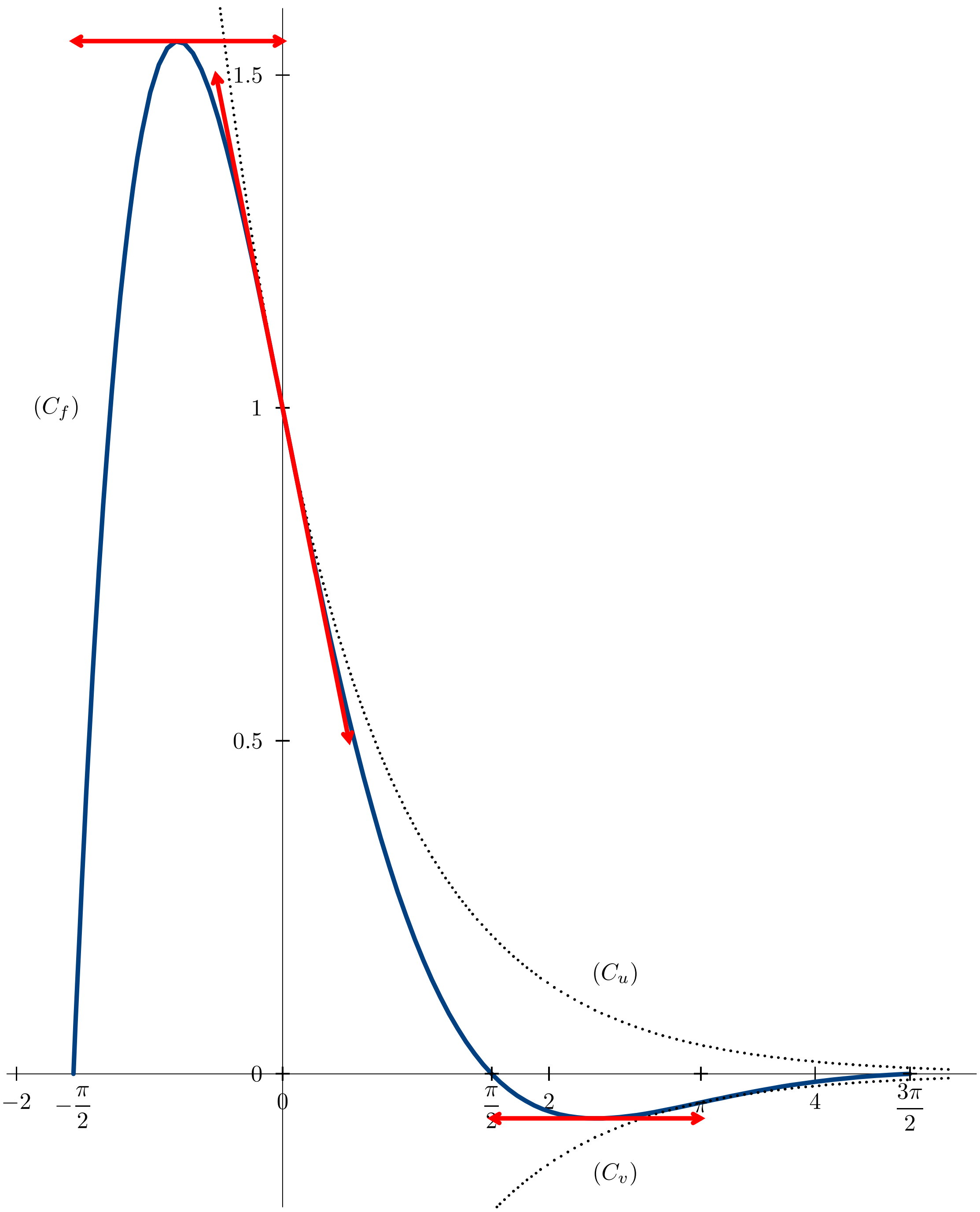
π appartient à l'intervalle $I_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $f'(\pi) = e^{-\pi}$ est > 0, donc f' est > 0 dans I_3.

Voici le tableau de variations de f.

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	r	$\searrow$	s	$\nearrow$	0

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

Et voici les courbes représentatives de f, u et v.



3. a. Pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$ et tout t appartenant à $\mathbb{R}$, $g(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-t-2k\pi}\cos t$ parce que la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Donc $g(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi}g(t)$.

En dérivant cette dernière expression par rapport à t on obtient :

$g'(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi}g'(t)$.

En particulier pour tout t appartenant à I et tout k appartenant à $\mathbb{Z}$, $g'(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(t)$. Cette relation permet de déterminer parfaitement le signe de g' dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément :

Si t appartient à un intervalle du genre $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]$ ou $\left[\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $g'(t)$ est positif

Si t appartient à un intervalle du genre $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $g'(t)$ est positif

b. Un point M de coordonnées $(t, u(t))$ appartient à $\Gamma \cap C_u$ si et seulement si $u(t) = g(t)$ c'est à dire $\cos t = 1$ ou $t = 2k\pi, k$ appartenat à $\mathbb{Z}$, et alors $u(t) = \mathrm{e}^{-2k\pi}$.

Donc $\Gamma \cap C_u = \left\{M(2k\pi, \mathrm{e}^{-2k\pi}),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Un point M de coordonnées $(t, v(t))$ appartient à $\Gamma \cap C_v$ si et seulement si $v(t) = g(t)$ c'est à dire $\cos t = -1$ ou $t = (2k+1)\pi, k$ appartenat à $\mathbb{Z}$, et alors $v(t) = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$.

Donc $\Gamma \cap C_v = \left\{M((2k+1)\pi, \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. En un point $M(2k\pi, \mathrm{e}^{-2k\pi})$ commun à Γ et à C_u, la pente de la tangente à Γ est $g'(2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} g'(0) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(0) = -\mathrm{e}^{-2k\pi}$ et la pente de la tangente à C_u est $u'(2k\pi) = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=2k\pi} = -\mathrm{e}^{-2k\pi}$.

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point M sont confondues.

En un point $M((2k+1)\pi, \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi})$ commun à Γ et à C_v, la pente de la tangente à Γ est $g'((2k+1)\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} g'(\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(\pi) = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$ et la pente de la tangente à C_u est $u'((2k+1)\pi) = \mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=(2k+1)\pi} = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$.

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point M sont confondues.

d. $0 \leq \left|\cos t\ \mathrm{e}^{-t}\right| \leq \mathrm{e}^{-t}$. Or $\lim\limits_{t \mapsto \infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{t \mapsto \infty} g(t) = 0$.

4. a. Pour simplifier posons $r_k = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $s_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ de sorte que

$a_k = \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} g_k(t)\ dt$;

ensuite intégrons une première fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & \Rightarrow \quad u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \cos t & \Leftarrow \quad v'(t) = \sin t \end{cases}$$

Alors $a_k = \left[\sin t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} + \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} \sin t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$

intégrons une deuxième fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & \Rightarrow \quad u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \sin t & \Leftarrow \quad v'(t) = -\cos t \end{cases}$$

Alors $a_k = \left[\sin t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} + \left[-\cos t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} - \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} \cos t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

c'est à dire $a_k = \left[(\sin t - \cos t)\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} - a_k$ ou $a_k = \dfrac{1}{2}\left[(\sin t - \cos t)\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k}$.

Or $\cos r_k = \cos s_k = 0$ et $\sin r_k = (-1)^{k+1}$ et $\sin s_k = (-1)^k$.

Donc $a_k = \dfrac{1}{2}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{-s_k} - (-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-r_k}\right] = \dfrac{1}{2}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{-s_k} + \mathrm{e}^{-r_k}\right]$

$a_k = \dfrac{1}{2}(-1)^k \mathrm{e}^{-k\pi}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right]$

b. $s_n = C_h \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k\pi}$ avec $C_h = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

La somme est la somme des $n+1$ premiers termes de la progression géomtrique de premier terme 1 et de raison $e^{-\pi}$.

Donc $s_n = C_h.1.\dfrac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$.

Puisque $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi} = 0$, la suite (s_n) admet une limite et cette limite est égale à :

$s = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} s_n = C_h \dfrac{1}{1 - e^{-\pi}}$.

s_n représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$, la verticale d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ et la courbe représentative de g.

s représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et la courbe représentative de g.

5. a. $x'_t = -(\cos t + \sin t)\ \mathrm{e}^{-t}$
et $y'_t = (\cos t - \sin t)\ \mathrm{e}^{-t}$.

On a : $x'_t = -(\cos t + \sin t)\ \mathrm{e}^{-t} = -\cos(t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$

et $y'_t = (\cos t - \sin t)\ \mathrm{e}^{-t} = -\sin(t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

$x'_t = \cos(\pi + t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} = \cos(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$ et

$y'_t = \sin(\pi + t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} = \sin(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Les zéro de x' sont $t_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ et $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Le zéro de y' est $t_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

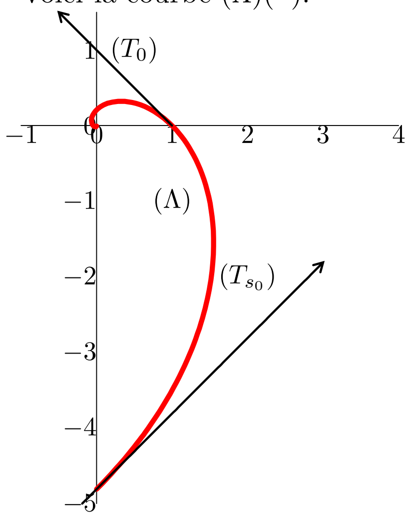
On détermine les signes de x' et y' par la méthode utilisée pour déterminer le signe de f'.

Voici le tableau de variations conjointes.

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
x'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	↗	r	↘	s	↘	t	↗	0
y	v	↗	$-r$	↗	s	↘	$-t$	↘	u
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

$r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ $s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ $t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$ $u = -\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}$ $v = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$

Voici la courbe (Λ)([1]).



La tangente (T_{s_0}) au point de paramètre $s_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ est la droite passant par le point de coordonnées $(0, -\mathrm{e}^{-s_0})$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(x'_{s_0}, y'_{s_0}) = (e^{-s_0}, e^{-s_0})$ ou $(1, 1)$.

La tangente (T_0) au point de paramètre 0 est la droite passant par le point de coordonnées $(1, 0)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(x'_0, y'_0) = (-1, 1)$.

b. Rapellons que θ étant un réel, le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et en désignant par M_θ le point de cordonnées $(\lambda \cos\theta, \lambda \sin\theta)$, $\lambda > 0$ alors θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_\theta})$.

On en déduit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_t}) \equiv t$.

$\overrightarrow{V}_t$ a pour coordonées $x'_t = \cos(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$ et $y'_t = \sin(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_t}) \equiv t + \dfrac{3\pi}{4}$.

Puis $(\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{V_t}) = (\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_t}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}$.

1. La courbe (Λ) est une spirale. Son équation polaire est : $r = \mathrm{e}^{-t}$