UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis AR
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1.

1. Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.

a) Montrer que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe (D) inclus dans le plan médiateur de $[AB]$. 1 **pt**

b) Réciproquement, soit (D) une droite du plan médiateur de $[AB]$. Montrer qu'il existe une rotation et une seule d'axe (D) transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur (D). 1 **pt**

2. Soit $OABC$ un tétraèdre régulier dont tous les côtés ont la même longueur c'est à dire

$$OA = OB = OC = BC = AB = AC.$$

a) Montrer qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B. $0,5$ **pt**

b) Montrer que le projeté orthogonal K de A sur (OC) est le milieu de $[OC]$.

En déduire que $KA = AB\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $0,25 + 0,25 = 0,5$ **pt**

c) Déterminer le cosinus de l'angle de la rotation R_1 1 **pt**

EXERCICE 2.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
"Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p."

1. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29. $0,5$ **pt**

2. Soient a et n deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que

$$(a+1)^n \equiv 1^n\ [a].$$

En déduire que $4^n \equiv 1\ [3]$. $0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

3. Soient a et n deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que

$$(a-1)^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [a].$$

En déduire que $4^{4n} \equiv 1\ [17]$ et $4^{2n} \equiv 1\ [5]$. $0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$ **pt**

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer 4 diviseurs premiers de $4^{28} - 1$. 1 **pt**

PROBLEME.

Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{2}\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,$$

où a est un réel non nul.

On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$ (unité graphique 1 cm).

Partie A: ($5,5$ pts)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a puis calculer les limites de f_a à ses bornes. $0,25 + 0,5 = 0,75$ **pt**

2. a) Prouver que toutes les courbes (C_a) passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées. $0,5$ **pt**

b) Démontrer que le point I est centre de symétrie de toutes les courbes (C_a). $0,5$ **pt**

3. Déterminer les asymptotes de (C_a) puis étudier les positions relatives de (C_a) par rapport à son asymptote oblique (Δ). $0,25 + 0,25 + 0,5 = 1$ **pt**

4. Vérifier que f_a est dérivable dans D_{f_a} et calculer $f'_a(x)$ pour tout $x \in D_{f_a}$. $0,25 + 0,5 = 0,75$ **pt**

5. Soit g_a le trinôme défini pour tout x réel par :

$$g_a(x) = x^2 + a - 1$$

a) Résoudre, suivant les valeurs de a l'équation $g_a(x) = 0$. $0,5$ **pt**

b) Dans le cas où l'équation $g_a(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, on note x_1 la solution strictement positive.

Déterminer en fonction de a le signe de $1 - x_1$. $0,5$ **pt**

c) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel a **strictement négatif**, les variations de f_a. $0,5$ **pt**

6. Tracer la courbe (C_{-1}) dans le repère $\mathcal{R}$. Les points d'inflexion et d'intersection avec l'axe des abscisses ne sont pas demandés. $0,5$ **pt**

Partie B: (3 pts)

Soit b un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et φ_b l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}\Big[(1-b) + (1+b)i\Big]z + \frac{1}{2}\Big[(1+b) + (1+b)i\Big]\bar{z} + i(1+b)$$

où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1. a) Ecrire x' et y' en fonction de x, y et b. $0,5$ **pt**

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ_b est la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$. $0,5$ **pt**

c) Démontrer que si M n'est pas un point de (Δ) alors la droite (MM') est parallèle à une direction fixe. $0,5$ **pt**

d) Soit M_0 le point de (Δ) ayant même abscisse que M.

Exprimer $\overrightarrow{M_0M'}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M}$. $0,5$ **pt**

2. a) Démontrer que pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_b(C_a) = (C_{-ab})$. $0,5$ **pt**

b) En déduire une construction géométrique simple de C_{-3} point par point à partir de C_{-1} dans le repère $\mathcal{R}$. $0,5$ **pt**

Partie C: (3,5 pts)

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par (C_a), (C_{a+2}) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. en utilisant une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 1} A(\lambda)$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

2. On considère la fonction h définie pour tout élément de $[0,\ 1[$ par : $h(x) = -\ln\left(1 + \dfrac{2x}{1-x}\right)$ et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} h\left(\frac{p}{n}\right)$.

a) Déterminer le sens de variation de h sur $[0,\ 1[$ puis prouver que pour tout entier naturel p vérifiant : $0 \leq p \leq n-2$ on a :

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)\, dx \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{p}{n}\right)$$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

b) en déduire que :

$$S_n + \frac{1}{n} h\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq A\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n$$
$$\text{et } A\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq A\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} h\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

c) Déduire de **1.** que $\lim\limits_{n \to +\infty} S(n) = \ln 4$ $0,5$ **pt**

CORRECTION

EXERCICE 3.

1. a) Si M un point quelconque de l'axe d'une telle rotation, alors $R(M) = M$.

Comme les rotations conservent les distances, le tableau

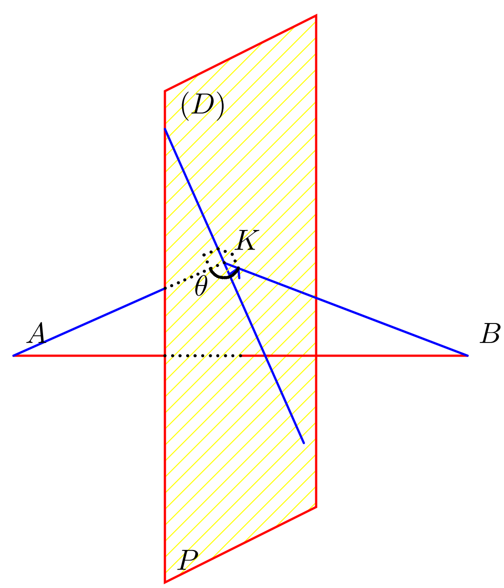
antécédent	A	M
Image	B	M

montre que $AM = BM$; ce qui veut dire que M appartient au plan P médiateur de $[A, B]$.

b) Soit (D) une droite contenue dans le plan P et K le projeté orthogonal de A sur (D).

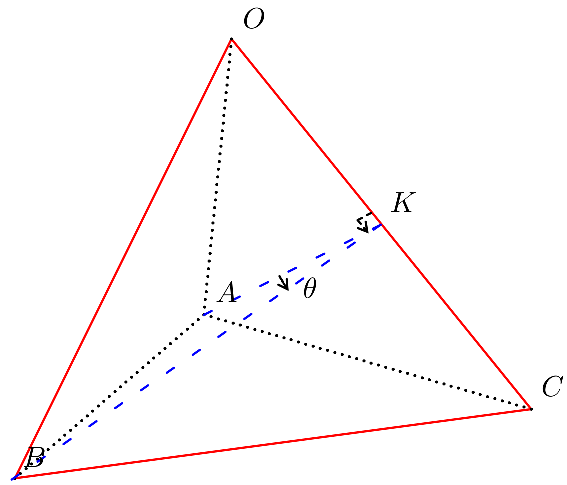
Alors la droite (D) est orthogonale aux droites (AK) et (AB) ; par conséquent elle est perpendiculaire au plan (ABK) défini par ces deux droites sécantes.

La rotation d'axe (D) et d'angle $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$ est la seule rotation d'axe (D) transformant A en B.



2. a) Les relations $OA = OB$ et $CA = CB$ signifient que les points O et C appartiennent au plan médiateur du segment $[AB]$; donc la droite (OC) est contenue dans ce plan médiateur.

Par conséquent, d'après la question précédente, il existe une et seule rotation R_1 d'axe (OC) transformant A en B



b) Puisque le triangle OAC est équilatérale, la hauteur (AK) est aussi la médiane issue de A ; donc K est le milieu du segment $[OC]$.

On en déduit $KC = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a}{2}$ où a désigne la longueur de l'arête du tétraèdre.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKC rectangle en K on obtient : $AK^2 = AC^2 - KC^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$. Donc

$$\boxed{AK = a\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

c) Dans le triangle isocèle AKB de sommet K, désignons par L le projeté orthogonal de K sur la droite (AB) et par θ une mesure de l'angle $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}$. Le point L est aussi le milieu de $[AB]$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKL rectangle en L on obtient : $KL^2 = KA^2 - AL^2 == \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$ c'est à dire $KL = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{KL}{KA} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; ensuite $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 2\dfrac{2}{3} - 1$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{3}}$$

EXERCICE 4. [1]

1. En appliquant le petit théorème de Fermat avec $p = 29$ qui est premier et $a = 4$, on peut écrire : $4^{29-1} - 1$ est divisible par 29.

✎ Soient a, b, c, d, p et n des entiers naturels avec p et n non nuls. Alors on a modulo p :

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \equiv & c \\ b & \equiv & d \end{array}\right| \Rightarrow a+b \equiv c+d\,; \quad \left.\begin{array}{rcl} a & \equiv & c \\ b & \equiv & d \end{array}\right| \Rightarrow ab \equiv cd\,; \qquad a \equiv c \Rightarrow a^n \equiv c^n$$

Autrement dit, on peut additionner membre à membre des congruences, les multiplier ou les élever à une puissance donnée.

1. Si p est premier, $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\};\ .\right)$ est un groupe d'ordre $p-1$ et d'élément neutre $\dot{1}$. Alors $\forall a \in \mathbb{Z}$ et premier avec p (donc non multiple de p ou $\dot{a} \neq \dot{0}$), $\dot{a}^{p-1} = \dot{1}$ c'est à dire $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

2. On peut donc écrire d'après ce préliminaire et pour tous entiers a et n non nuls :

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \equiv & 0\ [a] \\ 1 & \equiv & 1\ [a] \end{array}\right| \Rightarrow a+1 \equiv 1\ [a] \Rightarrow (a+1)^n \equiv 1^n\ [a]$$

On obtient alors la relation demandée $4^n \equiv 1\ [3]$ en prenant $a = 3$.

3. On a aussi, toujours d'après ce préliminaire et pour tous entiers a et n non nuls :

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \equiv & 0\ [a] \\ -1 & \equiv & -1\ [a] \end{array}\right| \Rightarrow a-1 \equiv -1\ [a] \Rightarrow (a-1)^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [a]$$

On en déduit en prenant $a = 17$ que $16^{2n} \equiv 1\ [17]$ c'est à dire $4^{4n} \equiv 1\ [17]$

Et en prenant $a = 5$ que $4^{2n} \equiv 1\ [5]$.

4. On déduit de $4^n \equiv 1\ [3]$ en prenant $n = 28$ que $4^{28} \equiv 1\ [3]$ c'est à dire $4^{28} - 1$ est divisible 3.

On déduit de $4^{4n} \equiv 1\ [17]$ en prenant $n = 7$ que $4^{28} \equiv 1\ [17]$ c'est à dire $4^{28} - 1$ est divisible 17.

On déduit de $4^{2n} \equiv 1\ [5]$ en prenant $n = 14$ que $4^{28} \equiv 1\ [5]$ c'est à dire $4^{28} - 1$ est divisible 5.

En résumé $4^{28} - 1$ est divisible par chacun des quatre nombres premiers $3, 5, 17$ et 29.

PROBLEME.

Partie A:

1. Soit x un réel.

$$x \in D_{f_a} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x+1} \text{ existe} \\ \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq -1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$$

Donc toutes les fonctions f_a ont même ensemble de définition et

$$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

✎ Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers 1 et $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers 0.

Lorsque x tend vers 1, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers 0 et est > 0 ; donc $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers $-\infty$.

Lorsque x tend vers -1, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers $+\infty$; donc $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers $+\infty$.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty}$$

Si $a > 0$:	Si $a < 0$:
$\lim_{x \mapsto 1} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \mapsto 1} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \mapsto -1} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \mapsto -1} f(x) = -\infty$

2. a) Cherchons $I_0(x_0, y_0)$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $I \in C_{f_a}$.

$$
\begin{aligned}
& \forall a \in \mathbb{R}^*,\ I \in C_{f_a} \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in \mathbb{R}^*,\ y_0 = f_a(x_0) \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in \mathbb{R}^*,\ y_0 = x_0 + 1 + \frac{a}{2} \ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in \mathbb{R}^*,\ y_0 - x_0 - 1 - a\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| = 0;\ \text{polynôme en } a \text{ identiquement nul}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ \ln\left|\dfrac{x_0-1}{x_0+1}\right| = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ \left|\dfrac{x_0-1}{x_0+1}\right| = 1 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ \dfrac{x_0-1}{x_0+1} = 1 \text{ ou } \dfrac{x_0-1}{x_0+1} = -1 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x_0 - 1 = 0 \\ -1 = 1 \text{ ou } x_0 = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}
$$

Ainsi, toutes les courbes passent par le point $I(0,1)$.

b) Pour que le point I soit centre de symétrie de C_{f_a}, il faut et il suffit que pour tout x de D_{f_a}, le réel $2x_0 - x$ appartienne à D_{f_a} et $f_a(2x_0 - x) + f_a(x) = 2y_0$. Ici $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Soit x un élément de D_{f_a} c'est à dire x est différent de 1 et -1. Alors $2x_0 - x = -x$ est aussi différent de 1 et -1 c'est à dire appartient à D_{f_a}.

De plus

$$f_a(2x_0-x)+f_a(x) = f_a(-x)+f_a(x) = -x+1+\frac{a}{2}\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right|+x+1+\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 2 = 2y_0$$

3. Lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers 1 et $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ tend vers 0.

Donc en posant $\varphi(x) = \dfrac{a}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$, on peut écrire :

$$f_a(x) - (x+1) = \varphi(x) \text{ et } \lim_{|x|\mapsto+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à C_{f_a} aussi bien au voisinage de $+\infty$ qu'au voisinage de $-\infty$

La position de la courbe C_{f_a} par rapport à Δ dépend qu signe de $\varphi(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{Or}, \forall x \in D_{f_a}, \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0 \ &\Leftrightarrow\ \left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1 \\
&\Leftrightarrow\ \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} > 1 \text{ (Car il est légitme d'élever au carré)} \\
&\Leftrightarrow\ (x-1)^2 > (x+1)^2 \\
&\Leftrightarrow\ -4x > 0 \\
&\Leftrightarrow\ x < 0
\end{aligned}
$$

Ainsi :

✉ Si $a > 0$, Pour $x > 0, \varphi(x) < 0$ donc $C_{f_a(x)}$ est dessous de Δ, Pour $x < 0, \varphi(x) > 0$ donc $C_{f_a(x)}$ est dessus de Δ,

✉ Si $a < 0$, Pour $x > 0, \varphi(x) > 0$ donc $C_{f_a(x)}$ est dessus de Δ, Pour $x < 0, \varphi(x) < 0$ donc $C_{f_a(x)}$ est dessous de Δ,

4. Désignons par u la fonction définie sur D_{f_a} par $u(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Alors

$$\forall x \in D_{f_a},\ f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{2} \ln |u(x)|$$

La fonction u est non nul sur D_{f_a}, y est dérivable et $\forall x \in D_{f_a},\ u'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.
La fonction f_a est donc dérivable sur D_{f_a} et

$$\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x) = 1 + \frac{a}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} = 1 + \frac{a}{2}\frac{2}{(x+1)^2}\frac{x+1}{x-1}$$
$$\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x) = \frac{x^2+a-1}{(x-1)(x+1)}$$

5. a) ✉ Si $1-a$ est < 0 c'est à dire $a > 1$, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
✉ Si $1-a$ est nul c'est à dire $a = 1$, l'équation $g(x) = 0$ a solution unique $x_0 = 0$.
✉ Si $1-a$ est > 0 c'est à dire $a < 1$, l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions opposées $x_1 = \sqrt{1-a}$ et $x_2 = -\sqrt{1-a}$.

b) En utilisant "l'expression conjuguée", on peut écrire : $1 - x_1 = 1 - \sqrt{1-a} = \dfrac{a}{1+\sqrt{1-a}}$.

Par conséquent, $1 - x_1$ et a sont de même signe.

c) En remarquant que $\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x) = \dfrac{g_a(x)}{(x-1)(x+1)}$, on voit que dérivée $f_a'(x)$ a le signe de $g_a(x).(x-1).(x+1)$.
Puisque a est < 0, $g_a(x)$ a deux racines opposées x_1 et x_2.
Voici le tableau des signes de $f_a'(x)$.

x	$-\infty$		x_2		-1		1		x_1		$+\infty$
$g_a(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Et voici le tableau de variation de f_a

x	$-\infty$		x_2		-1		1		x_1		$+\infty$
f'_a		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$		$+$	
f_a	$-\infty$	$\nearrow$	$f_a(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$	$\searrow$	$f_a(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$