UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis B 01
Durée: 2 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 2ème groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

1. ENONCES

EXERCICE 1 (4 pts).

1. On considère un triangle EFG tel que :

$$\begin{cases} FG = \sqrt{2}\ EF \\ \left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

a. Montrer que $EF = EG$.
$\left[\text{On pourra calculer } EG^2 \text{ en utilisant la relation } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}.\right]$ 1 **pt**

b. En déduire que le triangle EFG est rectangle et isocèle. $0,5$ **pt**

2. Dans le plan orienté on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A ; on suppose que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note A' le symétrique de A par rapport au point C.

a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s qui transforme A' en C et C en B. $0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

b. Soit Ω le centre de la similitude s. Démontrer que le triangle ΩCB est direct, rectangle et isocèle.
1 **pt**

c. En déduire une construction de Ω. $0,5$ **pt**

EXERCICE 2 (4 pts).

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle

$$(E:) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. 1 **pt**

2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$.

a. Montrer que g est une solution de (E). $0,5$ **pt**

b. Déterminer une primitive G de g en utilisant :

i : l'équation différentielle (E). $0,75$ **pt**

ii : une intégration par parties. $0,75$ **pt**

3. Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}.$$

a. Montrer que la restriction H de F à $[0,\ +\infty[$ est une bijection de $[0,\ +\infty[$ sur un intervalle à préciser. $0,5$ **pt**

b. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de H^{-1}, fonction réciproque de H.

$0,5$ **pt**

EXERCICE 3 (4 pts).

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le pgcd de 231 et 3311. 1 **pt**

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$$A_n = 1 + 2 + \cdots + n \text{ et}$$

Démontrer que $A_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ et $B_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. $2 \times 0,5 = 1$ **pt**

3. a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{2}k(3k+1)$ est un entier. $0,5$ **pt**

b. On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer le pgcd de A_n et B_n. 1 **pt**

4. Vérifier le résultat obtenu dans le cas où $n = 21$. $0,5$ **pt**

EXERCICE 4 (4 pts).

Dans le plan complexe on considère l'application φ qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

On note A le point d'affixe i.

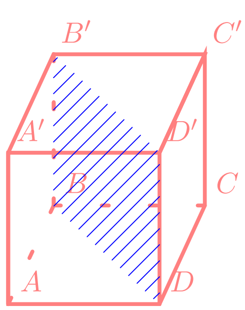
1. Déterminer l'affixe de A' image de A par φ. 1 **pt**

2. Montrer que $\dfrac{z'+i}{z'-i} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2}$, pour tout z distinct de i et de $-i$. 1 **pt**

3. En déduire $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'})$ en fonction de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'})$. 1 **pt**

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi[2\pi]$. 1 **pt**

EXERCICE 5 (4 pts).



Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube (Voir figure ci-contre).
On désigne par :
s_1 réflexion de base le plan $(AA'B'B)$.
s_2 réflexion de base le plan $(BB'CC')$.
s_3 réflexion de base le plan $(CC'DD')$.
s_4 réflexion de base le plan $(DD'AA')$.

1. a. Montrer que $r = s_2 \circ s_1$ est un demi tour dont on précisera l'axe. 1 **pt**

b. Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r' = s_4 \circ s_3$. 1 **pt**

2. On note s la réflexion de base le plan $(BB'DD')$.

a. Déterminer les réflexions s' et s'' telles que $r = s \circ s'$ et $r' = s'' \circ s$. 1 **pt**

b. En déduire que $t = r' \circ r$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{BD}$. 1 **pt**

2. CORRECTION

Proposée par les auteurs[1]

EXERCICE 1.

1. a. On a en utilisant les propriétés du produit scalaire et en désignant par θ une mesure de l'angle $\overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{FG}$:

$$EG^2 = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG})^2 = \overrightarrow{EF}^2 + \overrightarrow{FG}^2 + 2\,\overrightarrow{EF}\,\overrightarrow{FG} = EF^2 + FG^2 + EF\,FG\,\cos(\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{FG})$$

$$EG^2 = EF^2 + 2EF^2 + 2\sqrt{2}\,EF^2\,\cos(\theta - \pi) = EF^2 + 2EF^2 - 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,EF^2 = EF^2$$

$$\text{c'est à dire}\quad EG = EF$$

On déduit du résultat de la question précédente que le triangle EFG est isocèle de sommet E ; de plus :

$$EG^2 + EF^2 = 2\,EF^2 = FG^2.$$

Donc d'après le théorème de pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

2. a. Puisque le triangle ABC est isocèle rectangle de sommet A, on a : $CB + \sqrt{2}\,CA$.
Résumons les données dans un tableau.

Antécédent	A'	C	Ω
Image	C	B	Ω

Le rapport de s est $\dfrac{BC}{A'C} = \dfrac{BC}{A'C} = \sqrt{2}$

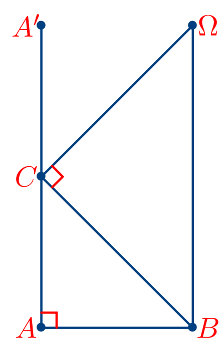
L'angle de s est $(\overrightarrow{A'C},\ \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{4}$

b. On a aussi d'après le même tableau :

$$(\overrightarrow{\Omega C},\ \overrightarrow{\Omega B}) = \text{angle de } s = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\Omega B}{\Omega C} = \text{rapport de } s = \sqrt{2}.$$

Les résultats de la question 1. montrent alors que le triangle ΩCB est direct, rectangle isocèle de sommet Ω



EXERCICE 2.

1. L'équation caractéristique associée à (E) est : $(E_c\ :)\quad r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle a une racine double $r_0 = -2$. Par conséquent la solution générale de l'équation (E) est $f_g(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$, a et b constantes arbitraires.
La fonction f s'écrit donc $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$.

1. Pour télécharger d'autres sujets

Alors $f'(x) = (-2ax + a - 2b)\mathrm{e}^{-2x}$. Donc $f(0) = b$ et $f'(0) = a - 2b$.

Les conditions imposées à f se traduisent par : $\begin{cases} b &= 0 \\ a - 2b &= 0 \end{cases}$ c'est à dire $a = 1$ et $b = 0$. Finalement $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$

2. a. $g(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$, $g'(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-2x}$ et $g''(x) = (4x+8)\mathrm{e}^{-2x}$; donc on a bien $g''(x) + 4g'(x) + g(x) = 0$.

b. Soit G une primitive de g c'est à dire une fonction telle que $G' = g$.

✉ i : La relation $g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = 0$ se traduit successivement par

$$\begin{aligned}
G'''(x) + 4G''(x) + 4G'(x) &= 0 \\
\Big(G'' + 4G' + 4G\Big)'(x) &= 0 \\
G''(x) + 4G'(x) + 4G(x) &= C^{te} \\
g'(x) + 4g(x) + 4G(x) &= C^{te} \\
G(x) &= -\frac{1}{4}g'(x) - g(x) + k, \quad k \text{ constante réelle}
\end{aligned}$$

$$G(x) = \Big(-\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\Big)\mathrm{e}^{-2x} + C^{te}$$

✉ ii : Faisons : $\begin{cases} u(x) &= x+3 \;\Rightarrow\; u'(x) = 1 \\ v'(x) &= \mathrm{e}^{-2x} \;\Leftarrow\; v(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$

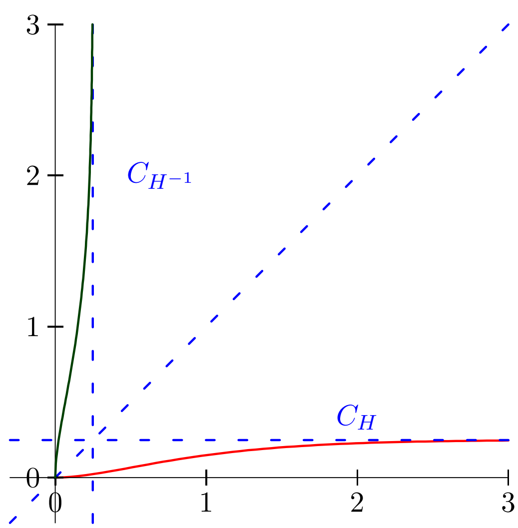
Alors

$$G(x) = \int g(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx =$$
$$-\frac{1}{2}(x+3)\mathrm{e}^{-2x} + \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(x+3)\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C^{te} \Leftrightarrow$$

$$G(x) = \Big(-\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\Big)\mathrm{e}^{-2x} + C^{te}$$

3. a. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est strictement positive dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $I = \mathbb{R}_+$ dans $J = F(I) = \Big[0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\Big[= \Big[0, \frac{1}{4}\Big[$



b. La fonction H^{-1} est dérivable en un point y de J si et seulement si la fonction H est dérivable en $x = H^{-1}(y)$ et $H'(x)$ est non nul ; de plus $(H^{-1})'(y) = \dfrac{1}{H'(x)}$.

Comme H' s'annule seulement en $x = 0 = H^{-1}(0)$, l'ensemble de dérivabilité de H^{-1} est $D_{(H^{-1})'} =]0, +\infty]$

EXERCICE 3.

1. Voici l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd de 231 et 3311.

$$3311 = 231.(14) + 77$$
$$231 = 77.(3) + 0$$

le pgcd de 231 et 3311 est donc 77

2. A_n est la somme des n premiers termes de la progression arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 : $A_n = \dfrac{1}{2} \times$ nombre de termes $\times($ premier terme $+$ dernier terme $)$. Donc $A_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

Etablissons par récurrence la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n avec $P_n =$ "$B_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$".

✉ Initialisation : P_1 est vraie car $B_1 = 1^2$. ✉ Héritage : Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à un rang n, en particulier que P_n soit vraie.

Alors

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= B_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \qquad \text{car } P_n \text{ est vraie} \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\Big[n(2n+1) + 6(n+1)\Big] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad \text{avec } k = n+1
\end{aligned}$$

P_{n+1} est donc vraie.

3. a. Posons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_k = \dfrac{1}{2}k(3k+1)$.

✉ Si k est un entier pair, il s'écrit $2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Alors $C_k = p(6p+1)$ appartient à $\mathbb{Z}$.

✉ Si k est un entier impair, il s'écrit $2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$. Alors $C_k = (2p+1)(3p+2)$ appartient à $\mathbb{Z}$.

b. Si n est un multiple de 3, il s'écrit $3q$, $q \in \mathbb{Z}$. Alors

$$A_n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}3q(3q+1) = 3C_q$$
$$B_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{2}q(3q+1)(6q+1) = (6q+1)C_q$$

C_q est un diviseur commun de A_n et B_n.

Or, 3 étant premier, est premier avec tout entier qu'il ne divise pas ; en particulier, il est premier avec $6q+1$. Par conséquent

$$C_q = \frac{1}{2}q(3q+1) \text{ est le pgcd de } A_n \text{ et } B_n, \text{ si } n = 3q.$$

c. Lorsque $n = 21, q = 7, A_n = 7 \times 11 \times 3 = 231, B_n = 7 \times 11 \times 43$ et $C_q = 7 \times 11 = 3311$.
Donc $A_{21} \wedge B_{21} = C_7 = 77.$

EXERCICE 4.

1. L'affixe de A' est $\varphi(i) = -\dfrac{1}{2}(i - \dfrac{1}{i}) = -i$

2. Pour tout z différent de i et de $-i$:

$$\frac{z'+i}{z'-i} = \frac{-\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}) + i}{-\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}) - i} = -\frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 + 2iz - 1} = \frac{(z'-i)^2}{(z'+i)^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{z'+i}{z'-i}\right)^2}$$

3. $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \arg \dfrac{-i - z'}{i - z'} = \arg \dfrac{z'+i}{z'-i}$.
Donc d'après la question précédente,

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \arg \frac{1}{\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2} = -\arg\left(\frac{z'+i}{z'-i}\right)^2 = -2\arg\frac{z+i}{z-i} = -2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'})$$

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = 2(\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MA}).$$

4. E désignant l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi[2\pi]$ et C le cercle de diamètre AA',

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi[2\pi] \\ &\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \pi[2\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow M \in C \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi[2\pi]$ est le cercle de diamètre AA'.

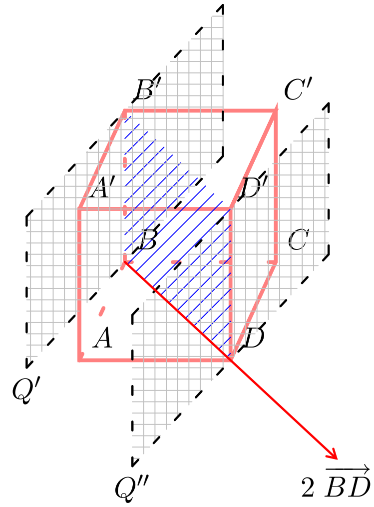
EXERCICE 5. Désignons par P_1, P_2, P_3 et P_4 les plans définissant les réflexions s_1, s_2, s_3 et s_4.
r est la rotation d'axe l'intersection de P_1 et P_2 c'est à dire la droite (BB') et d'angle $2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$

r est donc le demi-tour d'axe la droite (BB').

D'après le même raisonnement

r' est donc le demi-tour d'axe la droite (DD').

Désignons par Q le plan $BB'DD'$ qui définit la réflexion s, par Q' le plan perpendiculaire à Q et contenant la droite BB' par Q'' le plan perpendiculaire à Q et contenant la droite DD', par s' la réflexion de plan Q' et par s'' la réflexion de plan Q''.
a. D'après le raisonnement tenu dans la question 1, $r = s \circ s'$ et $r' = s'' \circ s$.
b. $t = r' \circ r = s'' \circ s \circ s \circ s'$. Donc $t = s'' \circ s'$ par ce que $s \circ s = I_d$.



Le deux plans Q' et Q'' étant parallèles, t es la translation de 2 $\overrightarrow{UV}$, les points U et V étant choisis sur Q' et Q'' respectivement et tels que (UV) soit une perpendiculaire commune à Q' et Q'' :

t es la translation de 2 $\overrightarrow{BD}$