UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

09 G 26 A 01
Durée: 4 heures
Séries : S2-S4-S5 - Coeff. 5

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (3 pts).

1. $(X,\ Y)$ est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X. Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

$$(D_1) : \quad y = ax + b \text{ et } (D_2) : x = a'y + b'$$

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Etablir que $r^2 = aa'$. 1 **point**

2. Dans une entreprise, une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donne les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x - y = 0$.
- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5y - 9x + 24 = 0$.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant leur covariance est positive. $0,5$ **point**

b. Calculer la moyenne de chacun caractères X et Y. $0,75 + 0,75$ **point**

EXERCICE 2 (5 pts).

Une urne contient quatre jetons qui portent le numéro 1, deux qui portent le numéro e, et six qui portent le numéro $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note x et y les nombres lus respectivement sur le premier et le deuxième jetons tirés.

A cette expérience on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: "M appartient à l'axe des abscisses". $0,5$ **point**

B: "M appartient à l'axe des ordonnées". $0,5$ **point**

C: "M appartient aux deux axes". $0,5$ **point**

D: "M n'appartient à aucun des axes". $0,5$ **point**

E: "L'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ est égal à $-\dfrac{\pi}{4}$". $0,5$ **point**

F: "le point M appartient au cercle trigonométrique". $0,5$ **point**

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la distance OM.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. 1 **point**

b. Déterminer la fonction de répartition de X. 1 **point**

EXERCICE 3 (5 pts).

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) : $y'' + 2y' + y = 0$.
Soit (E') l'équation différentielle : (E) : $y'' + 2y' + y = x + 3$

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E').

3. a. Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de $(E.)$

b. résoudre alors $(E'.)$

c. Déterminer la solution f de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

4. Soit la fonction k définie par $k(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

a. Etudier les variations de k.

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de k au point d'abscisse 0.

c. Démontrer que le point $I(0, 2)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

d. Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

EXERCICE 4 (3 pts).

1. a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x + 1)$.
$1,5$ **point**

Tracer sa groupe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité 3 cm.
1 **point**

b. Démontrer que sur $]2, +\infty[$ la fonction ℓ définie par $\ell(x) = f(x) - x$ est bijective et que l'équation $\ell(x) = 0$ admet une solution unique λ.

2. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 & = & 5 \\ U_{n+1} & = & 2\ \ln(1 + U_n). \end{cases}$$

a. Sans faire de calculer, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique. $0,5$ **point**

b. Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$. $0,5$ **point**

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]2, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$. $0,5$ **point**

d. En déduire que pour tout n, $|U_{n+1} - \lambda| \leq \dfrac{2}{3}|U_n - \lambda|$ que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et que la suite (U_n) converge vers λ. $0,5 + 0,25$ **point**

e. Déterminer le plus petit entier p tel que $|U_p - \lambda| \leq \dfrac{1}{10^2}$. Que représente U_p pour λ ?
$0,25 + 0,5$ **point**

CORRECTION

EXERCICE 1. [1]

1. (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation : $y = ax + b$, on a

$$a = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

1. pour voir d'autre corrections consulter http ://irempt.education.sn

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation : $x = a'y + b'$, on a

$$a' = \frac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} \text{ et } b = \bar{x} - a'\bar{y}$$

On en déduit que $aa' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}\dfrac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} = \dfrac{\Big(\text{cov}(X,Y)\Big)^2}{V(X)V(Y)} = \left(\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 \Rightarrow$

$$aa' = r^2.$$

2. (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite $y = 2,4x$, on a : $a = 2,4$ et $b = 0$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation réduite : $x = \dfrac{3,5}{9}y + \dfrac{24}{9}$, on a , on a : $a' = \dfrac{3,5}{9}$ et $b' = \dfrac{24}{9}$.

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$r^2 = aa' = 2,4\ \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}.$$

Puisque $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont positifs par définition et que $\text{cov}(X,Y)$ est positif par hypothèse, alors r est positif. Donc $r = \sqrt{\dfrac{14}{15}}$

3. On a $\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases}$

Je garde l'équation 1.
Je multiplie l'équation 2 par a
pour éliminer $\bar{x}$

$\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$

j'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$ c'est à dire

$$\bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver $\bar{x}$ j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la 2 : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$ c'est à dire

$$\bar{x} = b' + a'\frac{b + ab'}{1 - r^2} = \frac{b' - r^2b' + a'b + a'ab'}{1 - r^2} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1 - r^2}$$

Application numérique : Comme $\dfrac{1}{1 - r^2} = 15$, on a $\bar{y} = 15 \times\ 2,4 \times \dfrac{24}{9}$ et $\bar{x} = 15 \times \dfrac{24}{9}$ Donc

$$\bar{y} = 96 \text{ et } \bar{x} = 40$$

EXERCICE 2.

1. ✉ Pour que M appartiennent à l'axe des abscisses, il faut et il suffit que la partie imaginaire de z soit nulle c'est à dire $\ln y = 0$ ou $y = 1$. Donc $p(A) = p(y = 0) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

✉ Pour que M appartiennent à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit que la partie réelle de z soit nulle c'est à dire $\ln x = 0$ ou $x = 1$. Donc $p(B) = p(x = 0) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

✉ L'événement C est $A \cap B$.

Puisque le tirage est avec remise, les événements A et B sont indépendants, donc :

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A)p(B) = \frac{1}{9}.$$

✉ L'événement contraire de D est " M appartient à au moins un des axes" c'est à dire $A \cup B$.

Par conséquent :

$$p(\bar{D}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

✉ Pour que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{i})$ soit égal à $-\frac{\pi}{4}$ il faut et il suffit que les coordonnées de M soient égales et strictement positives c'est à dire $\ln x = \ln y > 0$ ou $x = y = \mathrm{e}$. Par conséquent, E est l'événement "$x = y = \mathrm{e}$".

$p(x = \mathrm{e}) = p(y = \mathrm{e}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ et $p(E) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

✉ Pour que M appartienne au cercle trigonométrique, il faut et il suffit que $OM = 1$ c'est à dire $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$. Puisque x et y ne prennent que les valeurs $1, \mathrm{e}$ et $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\ln x$ et $\ln y$ ne prennent que les valeurs $0, 1$ et -1 ;

Les seuls couples possibles pour réaliser $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$ sont donc

$$(\ln x, \ln y) = (1, 0),\ (-1, 0),\ (0, 1),\ \text{ou } (0, -1)$$

$$\text{c'est à dire } (x, y) = (\mathrm{e}, 1),\ (\frac{1}{\mathrm{e}}, 1),\ (1, \mathrm{e}),\ \text{ou } (1, \frac{1}{\mathrm{e}}).$$

$$\text{Or } p\Big((x, y) = (\mathrm{e}, 1)\Big) = p\Big((x, y) = (1, \mathrm{e})\Big) = \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{18}$$

$$p\Big((x, y) = (\frac{1}{\mathrm{e}}, 1)\Big) = p\Big((x, y) = (1, \frac{1}{\mathrm{e}})\Big) = \frac{6}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Donc } p(F) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

2. a. Puisque x et y ne prennent que les valeurs $1, \mathrm{e}$ et $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\ln x$ et $\ln y$ ne prennent que les valeurs $0, 1$ et -1 ; Les couples de coordonnées possibles sont donc :

$$(0, 0),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, -1),\ (-1, 0),\ (-1, 1),\ (-1, -1)$$

correspondant aux valeurs suivantes du couples (x, y) :

$$(1, 1),\ (1, \mathrm{e}),\ (1, \frac{1}{\mathrm{e}}),\ (\mathrm{e}, 1),\ (\mathrm{e}, \mathrm{e}),\ (\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}),\ (\frac{1}{\mathrm{e}}, 1),\ (\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}),\ (\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}})$$

Les distances OM possibles sont donc : $0,\ 1,\ \sqrt{2}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs $0,\ 1,\ \sqrt{2}$

$$p(X = 0) = p\Big((x, y) = (1, 1)\Big) = \frac{4}{12}\frac{4}{12} = \frac{1}{9}$$

$$p(X = 1) = p\Big((x, y) = (1, \mathrm{e})\Big) + p\Big((x, y) = (\mathrm{e}, 1)\Big)$$
$$+ p\Big((x, y) = (1, \frac{1}{\mathrm{e}})\Big) + p\Big((x, y) = (\frac{1}{\mathrm{e}}, 1)\Big)$$
$$= \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{12} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{12} = \frac{4}{9}$$

$$p(X = \sqrt{2}) = p\Big((x, y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})\Big) + p\Big((x, y) = (\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})\Big)$$

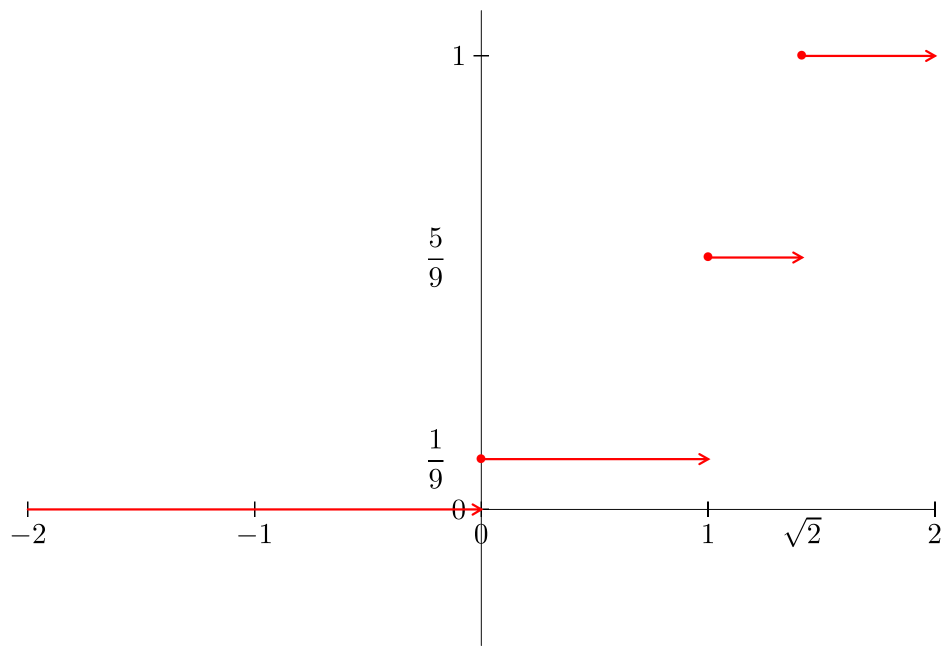
$$+p\Big((x,y)=(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e})\Big)+p\Big((x,y)=(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})\Big)$$
$$=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{6}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{4}{9}$$

En résumé :

$$p(X=0)=\frac{1}{9},\ p(X=1)=\frac{4}{9},\ p(X=\sqrt{2})=\frac{4}{9}$$

b. La fonction de répartition de X est définie par : $F(x)=p(X)<x$. Donc

- Si $x\leq 0,\ F(x)=p(X<x)=0$.
- Si $0<x\leq 1,\ F(x)=p(X<x)=p(X=0)=\dfrac{1}{9}$.
- Si $1<x\leq\sqrt{2},\ F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$.
- Si $\sqrt{2}<x,\ F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=\sqrt{2})=\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}=1$.



EXERCICE 3. L'équation caractéristique associée à (E) est

$$(E_c): r^2+2r+1=0\ \text{ c'est à dire }\ (r+1)^2=0.$$

1. Elle a une racine double égale à -1. Par conséquent la solution générale de (E) est :

$$f(x)=(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x};\ a\text{ et }b\text{ réels arbitraires.}$$

2. Pour que la fonction $h: x\mapsto ax+b$ soit solution de (E') il faut et il suffit que

$$h''(x)+2h'(x)+h(x)=x+3 \quad (1)$$

Or $h'(x)=a$ et $h''(x)=0$. Donc l'équation devient : $2a+(ax+b)=x+3$ c'est à dire $(a-1)x+2a+b-3=0$ ou $\begin{cases} a-1 & = & 0 \\ 2a+b-3 & = & 0 \end{cases}$. Donc $a=b=1$. Finalement

$$h(x)=x+1$$

3. a. Soit g une solution de (E') c'est à dire une fonction telle que :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3 \quad (2)$$

En faisant la différence membre à membre de (2) et (1) on trouve :

$$g''(x) - h''(x) + 2g'(x) - 2h'(x) + g(x) - h(x) = 0$$
$$\text{c'est à dire} \quad (g-h)''(x) + 2(g-h)'(x) + (g-h)(x) = 0 \quad (3)$$

Ce qui montre que la fonction $g - h$ est solution de (E).

Réciproquement $g - h$ est solution de (E) est équivalent à (3) soit à :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = h''(x) + 2h'(x) + h(x) \quad (4)$$

Or d'après (1) le second membre de cette relation vaut $x + 3$. donc (4) est équivalent à

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3$$

Autrement dit g est solution de (E').

b. L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 2r + 1 = 0$; Elle a une racine double $r_0 = -1$. Par conséquent la solution générale de l'équation (E) est $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{r_0 x}$, a et b constantes arbitraires.

La solution générale de (E') est donc $g(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + h(x)$ c'est à dire

$$g(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x + 1, \ a \text{ et } b \text{ constantes arbitraires.}$$

c. Cherchons la solution f de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. La fonction f est de la forme : $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x + 1$, a et b constantes arbitraires. Alors $f'(x) = (-ax - b + a)\mathrm{e}^{-x} + 1$; donc $f(0) = b + 1$ et $f'(0) = a - b + 1$.

La condition imposée à f donne : $\begin{cases} b + 1 & = & 2 \\ a - b + 1 & = & -1 \end{cases}$ c'est à dire $b = 1$ et $a = -1$.

Finalement : $f(x) = (-x + 1)\mathrm{e}^{-x} + x + 1$

4. a. La fonction k est continue sur son ensemble de définition D_k qui est égal à $\mathbb{R}$; de plus

$$\lim_{x \mapsto -\infty} k(x) = -\infty; \ \lim_{x \mapsto +\infty} k(x) = 0$$
$$\text{et } \forall x \in D_k, \ k'(x) = -(x + 1)\ \mathrm{e}^{-x}.$$

k' s'annule au point -1 et est > 0 si et seulement si $x + 1 < 0$ c'est à dire $x < -1$.

b. La tangente à la courbe en son point d'abscisse 0 a pour équation : $y = k'(0)(x-0) + k(0)$ c'est à dire $(T) : y = -x + 2$

c. Pour que le point $I(0, 2)$ soit un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$ il suffit que k soit deux fois dérivable et qu'au point 0, k'' "s'annule en changeant de signe".

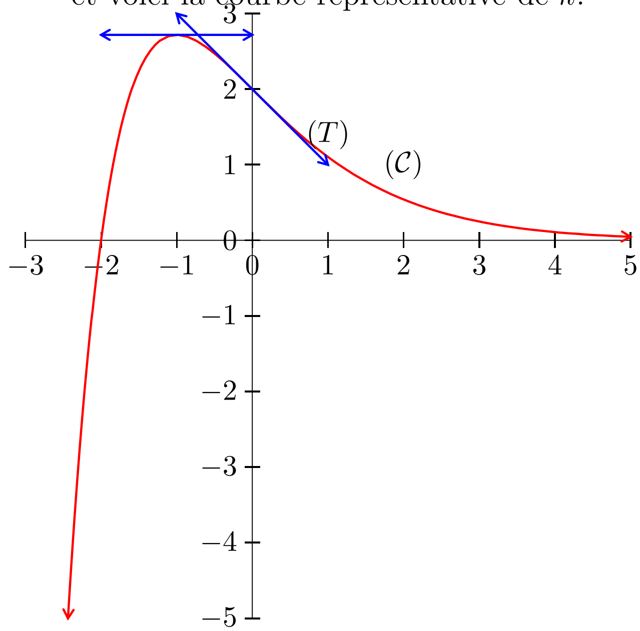
Cela est bien le cas puisque $k''(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}$ s'annule au point 0, est > 0 "après 0" et négatif "avant 0".

d. Voici le tableau de variations de k.

T.V de $x \to k(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
k'		$+$		$-$	
k	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

et voici la courbe représentative de k.



EXERCICE 4.

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $D_f =]-1,\ +\infty[$ et

$$\lim_{x \mapsto -1} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \forall x \in D_f,\ f'(x) = 2\frac{1}{1+x}.$$

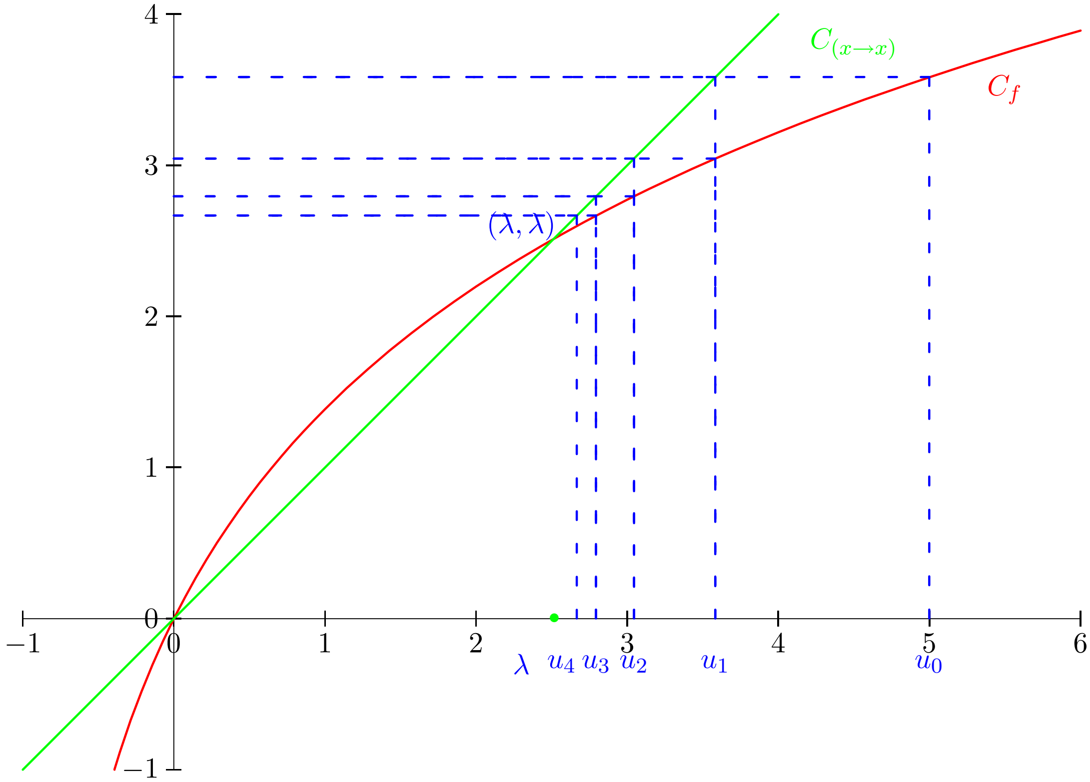
La dérivée est donc strictement positive dans D_f.

Voici le tableau de variation de f.

T.V de $x \to f(x) = 2\ln(1+x)$

x	-1		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

et voici la courbe C_f ainsi que les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.



b. La fonction ℓ est continue et dérivable sur D_f et

$$\lim_{x\mapsto -1} f(x) = -\infty;\ \forall x \in D_f,\ \ell'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, nous sommes en présence d'une indétermination de la forme "$+\infty - \infty$", mais on peut écrire : $\ell(x) = x\Big(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\Big)$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ a pour limite 0 ; donc le facteur $\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1$ a pour limite -1. Par conséquent $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \ell(x) = -\infty$.

Voici le tableau de variation de ℓ.

T.V de $x \to \ell(x) = f(x) - x; \alpha = \ell(2) = 2\ln 3 - 2 \sim 2,2$

x	2	λ	$+\infty$
ℓ'		$-$	
ℓ	α ↘	0 ↘	$-\infty$

La fonction ℓ étant continue et strictement décroissante dans $I = [2,\ +\infty[$, réalise une bijection de I dans $\ell(I) = J =]-\infty,\ \alpha[$; et puisque le réel 0 appartient à J, il a dans l'intervalle I un seul antécédent par ℓ, autrement dit, l'équation $\ell(x) = 0$ a dans I une solution unique λ.

Ce λ est alors l'unique élément de I tel que $f(\lambda) = \lambda$.

2. a. Voir graphique.

b. La fonction f étant continue et strictement croissante dans $I = [2, +\infty[$, réalise une bijection de I dans $f(I) = [f(2),\ +\infty[$; et puisque $f(2) = 2\ln 3 \sim 2,19$ est > 2, $f(I)$ est contenu dans I.

Démontrons maintenant par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ avec P_n : "$U_n \geq 2$"

✉ Initialisation : $U_0 = 5$, donnée de l'énoncé. Donc $U_0 \geq 2$ et P_0 est vrai.

✉ Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang n, en particulier P_n vrai (c'est à dire $U_n \geq 2$ ou $U_n \in I$) et montrons que P_{n+1} est vrai.

$$\left.\begin{array}{ll} U_n \in I & \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ f(I) \subset I & \\ U_{n+1} = f(U_n) & \end{array}\right\} \Rightarrow U_{n+1} = f(U_n) \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2$$

c. $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = \dfrac{2}{1+x}$; donc $\forall x \in]2, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion $\forall x \in]2, +\infty[, |f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les réels U_n et λ appartiennent à $[2, +\infty[$, intervalle dans lequel $|f'| \leq \dfrac{2}{3}$, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis au couple (U_n, λ) :

$$|f(U_n) - f(\lambda)| \ \leq \frac{2}{3}\ |U_n - \lambda|\,;$$

c'est à dire, puisque $f(\lambda) = \lambda$

$$|U_{n+1} - \lambda| \ \leq \frac{2}{3}\ |U_n - \lambda|\,;$$

Posons $\Big|U_n - \lambda\Big| = \delta_n$; la relation précédente devient alors $0 < \delta_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}\ \delta_n$ (1).

Si au lieu de "$\leq$" on avait "=", la suite δ_n serait une suite géométrique et on pourrait immédiatement écrire $\delta_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \delta_0$. C'est pourquoi d'aucuns disent d'une suite vérifiant (1) qu'elle est sous-géométrique

Utilisons la même méthode : donnons à n toutes les valeurs entières possibles entre 0 et p, p entier ≥ 0 ; multiplions ensuite membre à membre (Nous sommes en droit de le faire par ce que nous manipulons des nombres positifs). Il vient :

$$\delta_0\ \delta_1 \ldots \delta_p\ \delta_{p+1} \leq \frac{2}{3}\ \delta_0\ \frac{2}{3}\ \delta_1 \ldots \frac{2}{3}\ \delta_p$$

et en simplifiant [2] par $\delta_0\ \delta_1 \ldots \delta_p$: $0 < \delta_{p+1} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+1} \delta_0$ c'est à dire (tout en remplaçant p par n)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \Big|U_{n+1} - \lambda\Big| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \Big|U_0 - \lambda\Big| \quad (2)}$$

$\ell(2) \sim 2,2$ est positif, $\ell(3) \sim -2,2$ est négatif, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, λ est compris entre 2 et 3.

Puisque $U_0 = 5$, on en déduit que $|U_0 - \lambda| \leq 3$ et la relation (2) entraîne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \Big|U_{n+1} - \lambda\Big| \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$$

Cette dernière relation s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \delta_{n+1} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

2. En toute rigueur, avant de simplifier, il faut s'assurer qu'aucun des δ_p n'est nul. En fait, on peut montrer que c'est le cas ici. Dans le cas général, si un des δ_p est nul, la suite est stationnaire donc convergente.

En remarquant que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \delta_{n+1} = 0$, soit $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \delta_n = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left|U_n - \lambda\right| = 0$, enfin $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n - \lambda$

e. La relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|U_{n+1} - \lambda\right| \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ s'écrit aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|U_n - \lambda\right| \leq= 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Donc pour qu'un entier n vérifie $\left|U_n - \lambda\right| \leq \dfrac{1}{10^2}$, il suffit que $2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \dfrac{1}{10^2}$.

Cette relation est équivalente à : $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \ln\dfrac{1}{200}$ c'est à dire $(n-1)\ln\dfrac{2}{3} \leq -\ln 200$ ou $n - 1 \geq \dfrac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2}$, finalement $n \geq \dfrac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1$.

Le plus petit entier vérifiant cette relation est $p = E\left(\dfrac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1\right) + 1 = 15$