UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

10 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 points).

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 4$.
0,5 pt +0,25 pt

2. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
0,5 pt +0,25 pt

3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{3}{4}\pi$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{4}$. On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s. **0,5 pt +0,5 pt**

b) On note I le centre de la similitude s. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure.
0,25 pt x 4

c) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. **0,5 pt**

EXERCICE 2 (4 points).

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$."

1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier. **0,75 pt**

b) Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$. **0,5 pt**

2. On considère l'équation

$$(E) : \quad 83x - 192y = 1 \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a) Vérifier que le couple (155, 67) est solution de (E). **0,5 pt**

b) Résoudre l'équation (E). **0,75 pt**

3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :
à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193;
à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer $g(f(a)) \equiv a^{83\times 155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g\big(f(a)\big) = a$. **0,5 pt +0,5 pt**

b) Déterminer $f \circ g$. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Partie A

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & v \\ v' & = & au \end{array}\right. \tag{0.1}$$

1. a) Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle

$$y'' - ay = 0 \tag{0.2}$$

0,25 pt + 0,25 pt

b) résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a. **0,75 pt**

2. On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$. **0,75 pt**

Partie B

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit (Γ) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{3}{2}\big(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\big) \\ & & \\ y(t) & = & \dfrac{3}{2}\big(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\big) \end{array}\right. \quad t \geq 0 \tag{0.3}$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0,\ x = 3$ et $x = 5$.

1. a) Démontrer que (Γ) est une partie de la conique dont une équation est :

$$x^2 - y^2 - 9 = 0 \tag{0.4}$$

0,5 pt

b) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments géométriques caractéristiques. Construire (Γ). **0,5 pt + 0,5 pt**

2. Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - \sqrt{x^2 - 9} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2x} \end{array}$.

a) Etudier les variations de f. **0,75 pt**

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = \big[3,\ +\infty\big[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note φ cette restriction. **0,25 pt**

c) Démontrer que pour tout x élément de J, on a : $\varphi^{-1}(x) = g(x)$. **0,5 pt**

d) Tracer C_φ, courbe représentative de φ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Expliquer comment obtenir $C_{\varphi^{-1}}$, courbe représentative de φ^{-1} dans ce repère, à partir de C_φ. Tracer $C_{\varphi^{-1}}$.

0,25 pt x 3

3. Soit β un élément de $\big]0,\ 3\big[$ et $\alpha = g(\beta)$.

a) Calculer $\displaystyle\int_\beta^3 g(x)\,dx$ et en déduire que $\displaystyle\int_3^\alpha f(x)\,dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$.

[Indication : On pourra interpréter ces deux intégrales comme des aires.]

0,25 pt+0,75 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0,\ x = 3$ et $x = 5$. **0,75 pt**

Partie C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \tag{0.5}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n).

1. a) Etudier les variations de g puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0.$$

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ puis montrer que la suite (u_n) est monotone.

0,25 pt + 0,25 pt

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,25 pt + 0,25 pt

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{g(u_n) - 3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer une valeur possible de n pour que $u_n - 3 \leq 10^{-3}$. **0,25 pt**

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 3}$.

a) Montrer que $(\ln v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Exprimer alors u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n). **0,5 pt + 0,25 pt**

CORRECTION

EXERCICE 1.

1. Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow MA = 4\ MB \\ &\Leftrightarrow MA^2 = 16\ MB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 16\ \overrightarrow{MB}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 16\ \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 4\ \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 4\ \overrightarrow{MB}) = 0 \end{aligned}$$

Faisons intervenir les barycentres G_1 et G_2 des systèmes $\big((A,1);(B,-4)\big)$ et $\big((A,1);(B,4)\big)$ respectivement. Alors

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A}\ .\overrightarrow{G_2B} = 0$$

E est donc le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

2. L'ensemble F est l'arc capable défini par les points A, B et l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Soit T l'unique demi droite d'origine θ telle que pour tout point P de T, on a : $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = \theta$. Désignons par H l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec la perpendiculaire à T passant par A et par $\mathcal{C}$ le cercle de centre H et de rayon HA.

Alors $\mathcal{F}$ est l'arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités A et B tel que $\mathcal{F}$ et T se trouvent dans des demi plans distincts de frontière la droite (AB).

3. a) D étant l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$, on a $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. on en déduit que $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

C étant l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{3}{4}\pi$, on a $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\frac{3}{4}\pi$

Dans le tableau suivant les points de la deuxième ligne sont les images spar s des points de la première ligne.

A	C	I
B	D	I

Le rapport de s est $\frac{DB}{CA} = \frac{\frac{1}{4}AB}{CA} = \frac{1}{4}$ et son angle est modulo 2π :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{DB}) = \pi + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \pi + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Le rapport de s est $\frac{1}{4}$ et son angle est $\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

b) On a aussi $\frac{IB}{IA}$ = rapport de s c'est à dire $\frac{IA}{IB} = 4$ ou I appartient à $\mathcal{E}$

Puis $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ = angle de s c'est à dire $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}$ ou I appartient à $\mathcal{F}$.

I est donc le seul point d'intersection de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{F}$.

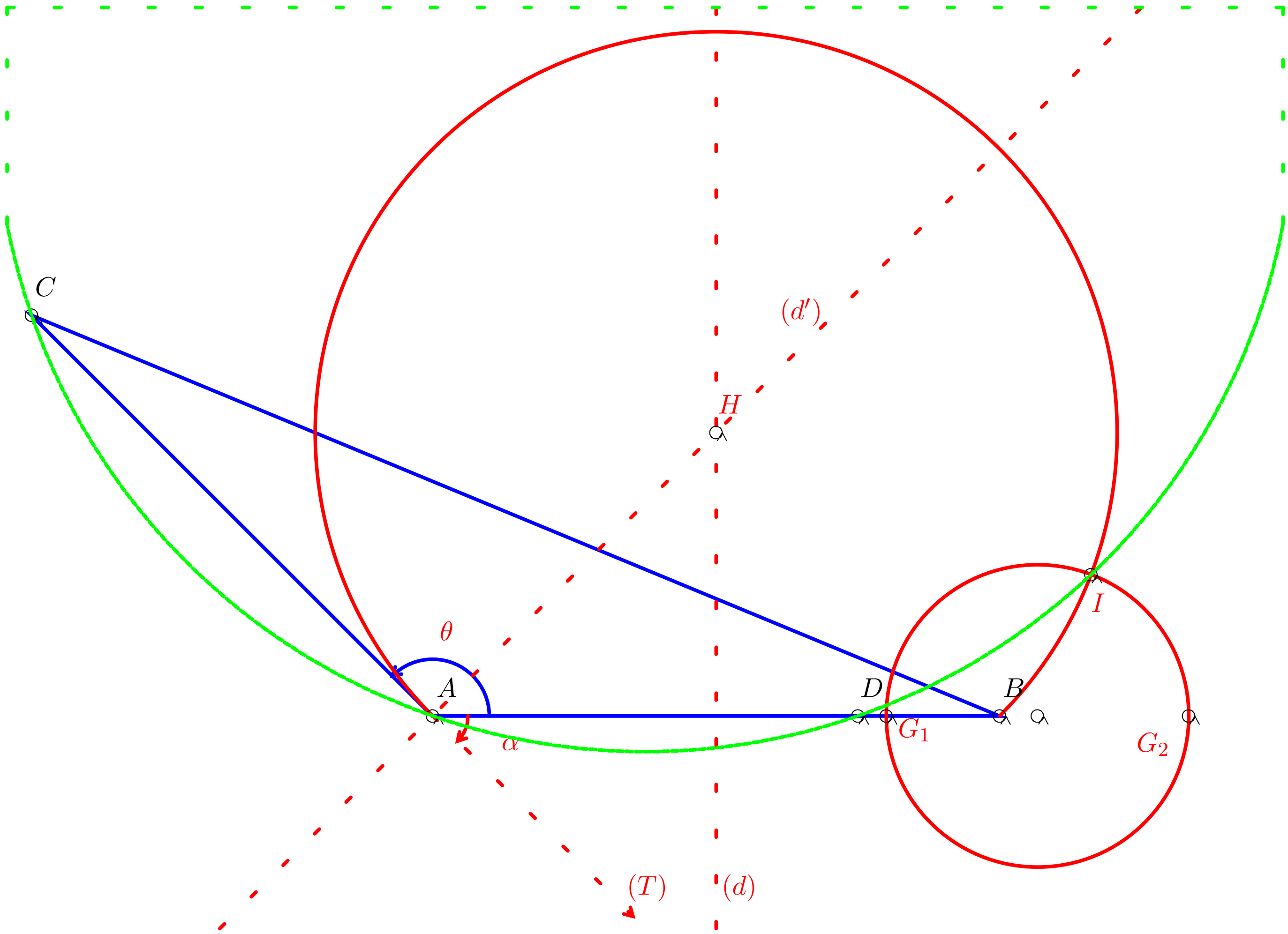
On a encore $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID})$ = angle de s c'est à dire $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{4}$

D'autre part $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -$ angle de s c'est à dire $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{3\pi}{4}$.

On en déduit en faisant la différence $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pi$ c'est à dire

$$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\ [\pi].$$

Donc les points I, A, C et D sont coycliques, autrement dit I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD.


C
(d′)
H
I
θ
A
D
B
G1
G2
α
(T)
(d)

EXERCICE 2.

1. a) Pour que 193 soit premier, il faut et il suffit qu'il soit non divisible par tout nombre premier dont le carré est inférieur à 193. Ces nombres sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et aucun d'eux ne divise 193.

b) 193 étant premier, est premier avec tout entier naturel strictement plus petit, en particulier, il est premier avec 192.

Il suffit d'appliquer le *petit théorème de Fermat* avec $a = 193$ et $p = 192$.

2. a) Le couple $(x_0, y_0) = (155, 67)$ est solution de (E) parce que $83.155 - 192.67 = 1$.

b) Si (x, y) est une solution de (E) on peut écrire :

$$\begin{cases} 83.x_0 - 192.y_0 & = & 1 \\ 83.x - 192.y & = & 1 \end{cases}$$

Puis en faisant la différence

$$83.(x - x_0) - 192.(y - y_0) = 0$$

c'est à dire

$$83.(x - x_0) = 192.(y - y_0)$$

Or 83 est premier avec 192 parce que l'équation (E) a une solution (*théorème de Bezout*).

La relation précédente montre que 83 divise le produit $192.(y - y_0)$ (en $x - x_0$ parties) ; comme il est premier avec 192, il divise $y - y_0$ (*théorème de Gauss*).

Donc il existe un entier k tel que $y - y_0 = 83k$ soit $y = y_0 + 83k$.

La relation $83.x - 192.y = 1$ devient alors $83.x = 192.(y_0 + 83k) + 1 = 83.(x_0 + 192k)$ c'est à dire $x = x_0 + 192k$.

Ensuite on vérifie que n'importe quel couple du genre $(x_0 + 192k, y_0 + 83k)$ est bien une solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{(155 + 192k, 67 + 83k),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. On utilisera la propriété suivante : Si a, b et n sont des entiers tels que

$$a \equiv b[n],$$

alors pour tout entier naturel k on a :

$$a^k \equiv b^k[n]$$

Posons $\mathcal{A} = \left\{0, \ldots 192\right\}$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $f(a)$ et $g(a)$ sont les seuls éléments de $\mathcal{A}$ tels que :

$$f(a) \equiv a^{83}\ [193] \quad (1)$$
$$\text{et } g(a) \equiv a^{155}\ [193] \quad (2)$$

Puisque $g(a)$ appartient à $\mathcal{A}$, dans (2), on peut remplacer a par $f(a)$:

$$g(f(a)) \equiv f(a)^{155}\ [193]$$

Dans (1) utilisons la propriété citée avec $k = 155$:

$$f(a)^{155} \equiv \left(a^{83}\right)^{155}\ [193]$$

On obtient alors par transitivité de $\equiv$:

$$g(f(a)) \equiv a^{83.155}\ [193] \quad (3)$$

a) Reprenons la relation

$$83.x_0 + 192.y_0 = 1$$

qui s'écrit aussi :

$$83.x_0 = 1 + 192.y_0$$

Cette relation permet d'avoir :

$$a^{83.x_0} = a^{1+192.y_0} = a\ (a^{192})^{.67}$$

Comme nous le savons déjà $a^{192} \equiv 1[193]$. Donc $a^{83.155} = a^{83.x_0} = a^{1+192.y_0} \equiv a.\ 1^{67}[193]$.
Finalement

$$a^{83.155} \equiv a[193] \quad (4).$$

(3) et (4) entraînent par transitivité :

$$g(f(a)) \equiv a[193]$$

$g(f(a))$ et a sont des éléments de $\mathcal{A}$ équivalents modulo 193.
Nous allons monter qu'ils sont égaux.
$g(f(a))$ et a sont des éléments de $\mathcal{A}$ entraîne $|g(f(a)) - a| \leq 192$
$g(f(a)) \equiv a[193]$ signifie il existe un entier k tel que $g(f(a)) - a = 193k.$
On déduit de ces deux propriétés que $193|k| \leq 192$ c'est à dire $k = 0$ ou $g(f(a)) = a$.
Le même raisonnement montre que pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a : $f(g(a)) = a$.
Nous venons de démontrer que $f \circ g = g \circ f = I_{\mathcal{A}}$

PROBLEME. Partie A

1. a) Dans 0.1, en dérivant la première équation et en remplçant v' par sa valeur tirée de la deuxième équation on obtient : $u'' = v' = au$. Cette dernière équation est équivalente à : $u'' - au = 0$. La fonction u est donc solution de 0.2.

De même, dans 0.1, en dérivant la deuxième équation et en remplçant u' par sa valeur tirée de de la première équation on obtient : $v'' = au' = av$. Cette dernière équation est équivalente à : $v'' - av = 0$. La fonction v est donc solution de 0.2, équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficient constants.

b) l'équation caractéristique de 0.2 est $r^2 - a = 0$.

• Si $a > 0$ l'équation caractéristique a pour solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. La solution générale de $y'' - ay = 0$ est donc $y = \lambda e^{\sqrt{a}\,t} + \mu e^{\sqrt{a}\,t}$,$\lambda$ et mu constantes arbitaires.
La fonction u étant solution de 0.2est de la forme précédente.
La relation $v = u'$ donne alors $v = \lambda\sqrt{a}\,e^{\sqrt{a}\,t} - \mu\sqrt{a}\,e^{-\sqrt{a}\,t}$.
La solution générale de 0.1 est donc

$$\begin{aligned} u &= \lambda\, e^{\sqrt{a}\,t} + \mu\, e^{-\sqrt{a}\,t}, \\ v &= \lambda\sqrt{a}\, e^{\sqrt{a}\,t} - \mu\sqrt{a}\, e^{-\sqrt{a}\,t}, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

• Si $a < 0$ l'équation caractéristique a pour solutions $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$. La solution générale de $y'' - ay = 0$ est donc $y = \lambda \cos\sqrt{-a}\ t + mu \sin\sqrt{-a}\ t$,$\lambda$ et μ constantes arbitaires.
La fonction u étant solution de 0.2 est de la forme précédente.
La relation $v = u'$ donne alors $v = -\lambda\sqrt{-a}\ \sin\sqrt{-a}\ t + \mu\sqrt{-a}\ \cos\sqrt{-a}\ t$.
La solution générale de 0.1 est donc

$$\begin{aligned} u &= \lambda \cos\sqrt{-a}\ t + \mu \sin\sqrt{-a}\ t, \\ v &= -\lambda\sqrt{-a}\ \sin\sqrt{-a}\ t + \mu\sqrt{-a}\ \cos\sqrt{-a}\ t, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

• Si $a = 0$ l'équation caractéristique a pour solution 0 . La solution générale de $y'' - ay = 0$ est donc $y = \lambda t + \mu$,λ et μ constantes arbitaires.

La fonction u étant solution de 0.2 est de la forme précédente.

La relation $v = u'$ donne alors $v = \lambda$.

La solution générale de 0.1 est donc

$$\begin{array}{rcl} u &=& \lambda t + \mu, \\ v &=& \lambda, \qquad\quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{array}$$

2. Si $a = 1$, il existe deux constantes λ et μ telle

$$\begin{array}{rcl} u &=& \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{-t} \\ v &=& \lambda\,\mathrm{e}^{t} - \mu\,\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

La relation $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$ se traduit par

$$\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 3 \\ \lambda - \mu &=& 0 \end{array}$$

En faisant la somme et la différence, on trouve : $\lambda = \mu = \dfrac{3}{2}$.

Finalement

$$\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) \\ \\ v &=& \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right) \end{array}$$

3. a) Un point M de coordonnée (x, y) appartient à Γ si et seulement si $\exists t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) \\ y = \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right) \end{cases}$ En élevant qu carré et en faisant la différence, on obtient

$$x^2 - y^2 = \frac{9}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} + 2\right) - \frac{9}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2\right) = 9$$

Par conséquent Γ est bien contenue dans la courbe d'équation $x^2 - y^2 - 9 = 0$

b) Pour construire Γ il suffit de savoir que Γ est la partie C_0 de la conique dont les points ont des coordonnées positives.

Γ est contenue dans C_0 car pour tout réel $t \geq 0, x(t)$ et $y(t)$ sont positives.

Réciproquement, soit $M(x,\, y)$ un point de C_0 c'est à dire un point tel que :

$$\begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x^2 - y^2 - 9 & = & 0 \end{cases} \text{ et cherchons } t \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) \\ \\ y = \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right) \end{cases}$$

La relation $x^2 = y^2 + 9$ montre que x est ≥ 3.

En posant $s = \mathrm{e}^{t}$ on doit donc chercher un $s \geq 1$ tel que $x = \dfrac{3}{2}(s + \dfrac{1}{s}) = 0$ c'est à dire

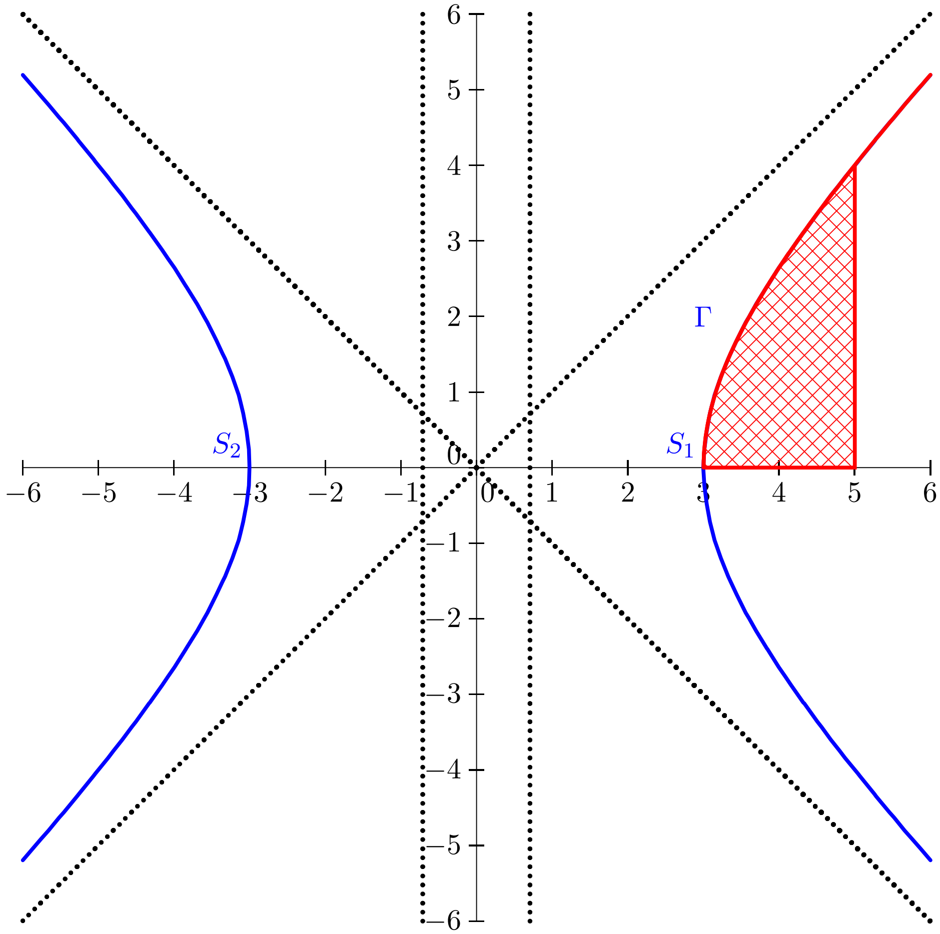
$$3s^2 - 2xs + 3 = 0$$

Les racines de cette dernière équation sont $s_1 = \dfrac{1}{3}(x + \sqrt{x^2 - 9})$ et $s_2 = \dfrac{1}{3}(x - \sqrt{x^2 - 9})$

Les racines sont de même signe car leur produit est 1. La racine s_1 est ≥ 1 ; en effet $s_1 = \dfrac{1}{3}(x + \sqrt{x^2 - 9}) \geq \dfrac{1}{3}x \geq 1$. Donc la racine s_2 est ≤ 1.

On prendra donc $s = s_1 = \dfrac{1}{3}(x + \sqrt{x^2-9})$ c'est à dire $t = \ln \dfrac{1}{3}(x + \sqrt{x^2-9})$. Donc $C_0 \subset \Gamma$

Finalement $C_0 = \Gamma$



Partie B

1. a) Un réel x appartient à l'ensemble D_f de définition de f si et seulement si $x^2 - 9 \geq 0$ c'est à dire $x \in]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$.

$$\text{Donc } \boxed{D_f =]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[}$$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$.

Quand $x \mapsto +\infty$ nous sommes en présence d'une indétermination de la forme "$+\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, on peut écrire :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2-9} = \frac{x^2 - (x^2-9)}{x + \sqrt{x^2-9}} = \frac{9}{x + \sqrt{x^2-9}}; \text{ donc } \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$$

La fonction f est dérivable sur $\overset{\circ}{D}_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ et $\forall x \in \overset{\circ}{D}_f$, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

Si $x < -3$, la dérivée est > 0.

Si $x > 3$, la dérivée est < 0 car

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-9} - x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}\left(\sqrt{x^2-9} + x\right)} < 0$$

On en déduit que la dérivée ne s'annule pas dans $\overset{\circ}{D}_f$.

Au point 3, le taux d'accroissement est pour $h > 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 6h}}{h} = \sqrt{1 + \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite $+\infty$ quand h tend vers 0^+. La fonction f n'est donc pas dérivable à droite au point 3 et on peut ajouter qu'au point de C_f dont l'abscisse est 3 il y a une demi-tangente verticale.

Raisonnement analogue au point -3 ; en ce point le taux d'accroissement est pour $h < 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 6h}}{h} = -\sqrt{1 - \frac{6}{h}}$$

Il a pour limite $-\infty$ quand h tend vers 0^-. La fonction f n'est donc pas dérivable à gauche au point -3 et on peut ajouter qu'au point de C_f dont l'abscisse est -3 il y a une demi-tangente verticale.

Voir le tableau de variation de f en fin de document.

b) La fonction f est continue et strictement décroissante dans l'intervalle I. Sa restriction φ à cet intervalle est donc une bijection de I sur $J = f(I) =]\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)\ , f(3)] =]0,\ 3]$

c) Soit $y \in J$ et cherchons $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

$$\forall y \in J \quad f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad y = x - \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & \geq & 0 \\ (x-y)^2 & = & x^2 - 9 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & \geq & 0 \\ -2xy + y^2 & = & -9 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & \geq & 0 \\ x & = & \dfrac{y}{2} + \dfrac{9}{2y} \end{array} \right.$$

L'application réciproque de φ est donc définie par $\forall y \in J,\ \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y}{2} + \dfrac{9}{2y} = g(y)$

Remarque 1.

1. Une fois que l'on sait que φ est bijective et puisque que la réciproque est donnée par l'énoncé, il suffit de vérifier que $\forall x \in J,\ g(x) \in I$ et $f \circ g(x) = x$.

   L'étude des variations de g montre bien que $g(J) = I$.

$$\forall x \in J,\ f \circ g(x) = g(x) - \sqrt{g(x)^2 - 9} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{9}{2x}\right)^2 - 9}$$

$$\forall x \in J,\ f \circ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{9}{2x}\right)^2} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \left|\frac{x}{2} - \frac{9}{2x}\right|$$

   Or $x \in]0,\ 3] \Rightarrow \dfrac{x}{2} - \dfrac{9}{2x} = \dfrac{x^2 - 9}{2x} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2x} \leq 0$; donc

$$\forall x \in J,\ f \circ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x} - \left(-\frac{x}{2} + \frac{9}{2x}\right) = x$$

2. Si on n'a pas montré que φ est bijective, il est nécessaire de vérifier que

$$\forall x \in J,\ g(x) \in I \text{ et } f \circ g(x) = x.$$
$$\text{et } \forall x \in I,\ f(x) \in J \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

a) On a pour tout $\beta \in]0,\, 3[$,

$$\int_\beta^3 g(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}\ln|x|\right]_\beta^3$$

$$\int_\beta^3 g(x)\,dx = -\frac{\beta^2}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$$

Les courbes C_φ et $C_{\varphi^{-1}}$ étant symétriques par rapport à la première bissectrice, $\displaystyle\int_3^\alpha f(x)\,dx$ représente aussi l'aire du domaine plan Δ_1 délimité par les droites $(B'E)$, $(C'D')$ l'axe des ordonnées et la courbe $C_{\varphi^{-1}}$.

Soit Δ_2 l'aire du rectangle $B'FD'C'$ et Δ_3 l'aire du rectangle $ABEF$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_3^\alpha f(x)\,dx &= \int_\beta^3 g(x)\,dx + \Delta_2 - \Delta_3\\
&= -\frac{\beta^2}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \beta(\alpha-3) - 3(3-\beta)\\
&= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{27}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \alpha\beta\\
&= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{27}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{9}{2\beta}\right)\beta
\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\int_3^\alpha f(x)\,dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$

b) Ici $\alpha = 5$ donc β est tel que $g(\beta) = 5$ c'est à dire $\beta = f(5) = 1$.

c) L'aire demandée est $\mathcal{A} = \displaystyle\int_3^\alpha \sqrt{x^2-9}\,dx$ en unités d'aire.[1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_3^\alpha \sqrt{x^2-9}\,dx\\
&= -\int_3^\alpha f(x)\,dx + \int_3^\alpha x\,dx\\
&= -\frac{\beta^2}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_3^\alpha\\
&= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \frac{1}{2}\alpha^2\\
&= -\frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{9}{2\beta}\right)^2\\
&= -\frac{\beta^2}{8} + \frac{81}{8\beta^2} + \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}
\end{aligned}$$

Et puisque $\beta = 1$, $\mathcal{A} = 10 - \dfrac{9}{2}\ln 3$ unités d'aire

Partie C

1. a) La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2-9}{x^2}$.

---

1. En faisant le changement de variable $x = 3\text{ch}t$, on trouve : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx = 9\int \text{sh}^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int (\text{ch}2t - 1)\,dt = \frac{9}{2}\left(\frac{\text{sh}2t}{2} - t\right) = \frac{9}{2}(\text{sh}t\text{ch}t - t) = \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} - \text{Argch}\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}$. Donc l'aire demandée est $\mathcal{A} = \displaystyle\int_3^5 \sqrt{x^2-9}\,dx = 10 - \frac{9}{2}\ln 3$ u.a.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} g(x) = -\infty$ Voir le tableau de variation de g en fin de document.

Posons $K = [3, +\infty[$. Le tableau de variation de g montre que $g(K) = K$.

Démonrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 3$.

La propriété est vrai au rang 0 par ce que $u_0 = 5 > 3$.

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à un rang n, en particulier $u_n > 3$ c'est à dire $u_n \in K$. Alors $u_{n+1} = g(u_n) \in g(K) = K$.

Par conséquent la propriété est vraie pour tout n.

La fonction g étant strictement croissante dans K, son taux d'accroissement est strictement positif dans K. Donc, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et u_{n-1} appartiennent à K, on a : $\dfrac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}$ est strictement positif c'est à dire $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} > 0$.

b) Les réels $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ ayant même signe, la suite $(u_{n+1} - u_n)$ garde un signe constant. Cela signifie que la suite (u_n) est monotone.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est alors celui de $u_1 - u_0 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{10} - 5 = -\dfrac{13}{5} < 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 3, a une limite ℓ supérieure à 3.

c) Puisque la fonction g est continue dans K (c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'anulle pas dans K) la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) = u_{n+1}$ entraîne $g(\ell) = \ell$ c'est à dire $\ell = -3$ ou 3. Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 3$.

2. a) Soient n un entier naturel non nul et appliquons *le thérème des accroissements* finis à g dans l'intervalle $[3,\ u_{n-1}]$: il existe un réel x_0 dans $]3,\ u_{n-1}[$ tel que $\dfrac{g(u_{n-1}) - g(3)}{u_{n-1} - 3} = g'(x_0)$ c'est à dire $\dfrac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2x_0^2}$. Donc $\dfrac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} < \dfrac{1}{2}$

En faisant le produit membre à membre de $n = 1$ à $n = p$ entier supérieur à 1 on obtient : $\prod\limits_{n=1}^{n=p} \dfrac{u_n - 3}{u_{n-1} - 3} < \prod\limits_{n=1}^{n=p} \dfrac{1}{2}$ c'est à dire après simplification $\dfrac{u_p - 3}{u_0 - 3} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^p$ soit $u_p - 3 < \dfrac{1}{2^{p-1}}$

Puisque $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} \dfrac{1}{2^{p-1}} = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le u_p - 3 < \dfrac{1}{2^{p-1}}$, *le théorème des gendarmes* permet de conclure que $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} |u_p - 3| = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} u_p = 3$.

b) La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le u_n - 3 < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ montre que pour que n soit tel que $u_n - 3$ soit inférieur à 10^{-3}, il suffit que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \le 10^{-3}$ c'est à dire $(n-1)\ln\dfrac{1}{2} \le -3\ln 10$ ou $n \ge \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} + 1$.

Finalement on peut prendre $n = E\left(\dfrac{3\ln 10}{\ln 2} + 1\right) + 1 = 11$ ([2])

3. a) Examinons d'abord le rapport v_{n+1}.

2. On peut améliorer ce résultat en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]3, 5]$ et que dans ce intervalle, $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2x^2} \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{50} = \dfrac{8}{25}$. En reprenant le même raisonnement avec cette nouvelle borne on trouve : $n = 7$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{9}{2u_n}-3}{\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{9}{2u_n}+3} = \frac{u_n^2-6u_n+9}{u_n^2+6u_n+9} = \frac{(u_n-3)^2}{(u_n+3)^2} = v_n^2$$

En prenant le logarithme on trouve $\ln v_{n+1} = 2\ln v_n$.

La suite $(\ln v_n)$ est donc géométrique de raison 2 et de 1$^{\text{er}}$ terme $\ln v_0 = \ln \dfrac{u_0-3}{u_0+3} = \ln \dfrac{2}{5}$.

b) Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln v_n = 2^n \ln v_0 = \ln \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2^n}$.

Soit en posant $q = \dfrac{2}{5}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = q^{2^n}$.

Tirons maintenant u_n en fonction de v_n :

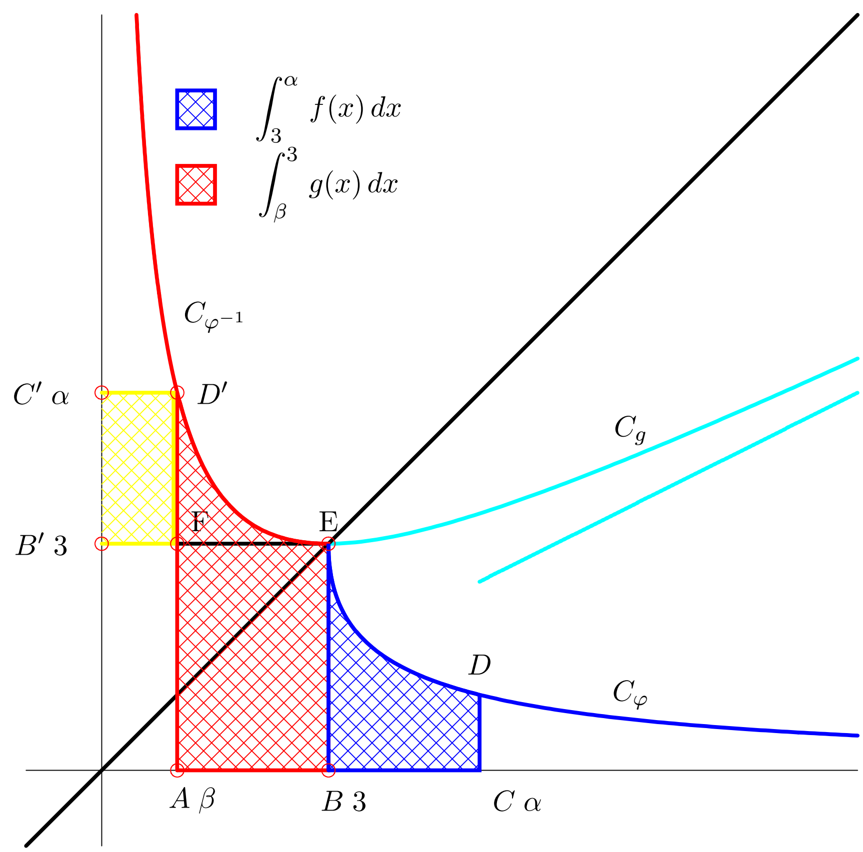
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+3} \Leftrightarrow u_n(1-v_n) = 3v_n+3 \Leftrightarrow u_n = 3\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

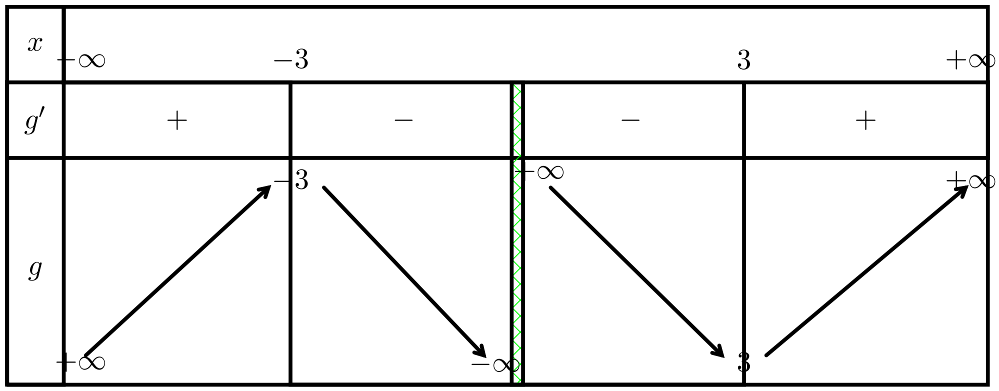
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\dfrac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}}$.

Puisque q appartient à $]0,\,1[$, la suite q^{2^n} a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3\dfrac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}} = 3.$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
f'		$+$				$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3		3	$\searrow$	0




x
$-\infty$
-3
3
$+\infty$
g'
$+$
$-$
$-$
$+$
g
-3
$+\infty$
$+\infty$
$+\infty$
$-\infty$
3