UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 

11 G 18bis B 01
Durée: 2 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

**Epreuve du 2$^{\text{ème}}$ groupe**

# M A T H E M A T I Q U E S

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n$^0$ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

1.

## EXERCICE 1.

**1.** Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E\ ) : z^2 - 5(1+i)z + 2(1+7i) = 0$$

Le discriminant de $(E\ )$ est $\Delta = 25(1+i)^2 - 8(1+7i) = -8-6i$
Cherchons $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On doit avoir : $\begin{cases} \text{Re }(\delta^2) & = & \text{Re }(\Delta) \\ |\delta^2| & = & |\Delta| \\ 2xy & = & -6 < 0 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x^2 - y^2 & = & -8 \\ x^2 + y^2 & = & 10 \\ 2xy & = & -6 < 0 \end{cases}$

En faisant la somme et la différence des deux premières équations et en divisant le résultat par 2 on trouve : $\begin{cases} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & < & 0 \end{cases}$

On peut donc prendre $x = 1$ et $y = -3$

Les racines de $(E)$ sont donc $\begin{cases} z_1 & = & \dfrac{5(1+i)+1-3i}{2} = 3+i \\ z_2 & = & \dfrac{5(1+i)-1+3i}{2} = 2+4i \end{cases}$

**2.** L'étude de problèmes faisant intervenir une expression de la forme $\overrightarrow{MO} + a\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ (fonction vectorielle de Leibniz) peut se faire en fonction de la somme $s = 1+a+1 = a+2$ des coefficients.

Si $s = 0$ c'est à dire $a = -2$ alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO} + a\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MO} + a\ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \\ &= (1+a+1)\overrightarrow{MO} + a\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= a\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

vecteur constant.
Par conséquent $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $f_a$ est est la translation de vecteur $a\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Si $s \neq 0$ c'est à dire $a \neq -2$ alors le système $\Big((O,1),\ (A,a),\ (B,1)\Big)$ a un barycentre $G$ et on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO} + a\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO} + a\ (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \\ &= s\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO} + a\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} \\ &= s\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

La relation qui définit $M'$ devient : $\overrightarrow{MM'} = s\overrightarrow{MG}$ c'est à dire $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = s\overrightarrow{MG}$ ou $\overrightarrow{GM'} = (s-1)\overrightarrow{MG}$ ; finalement $\overrightarrow{GM'} = -(a+1)\overrightarrow{GM}$.

Par conséquent $f_a$ est l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-a-1$.

En résumé : si $a = -2$, alors $f_a$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
si $a \neq -2$, alors $f_a$ est l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-a-1$.

NB. L'affixe de $\overrightarrow{u}$ est $z_{\overrightarrow{u}} = -2z_1 + z_2 = -4 + 2i$.

L'affixe de $G$ est $z_G = \dfrac{az_A + z_B}{1+a+1} = \dfrac{3a+2+i(a+4)}{a+2}$.

*On peut aussi faire un calcul direct.*

En appelant $z$ et $z'$ les affixes de $M$ et $M'$, la relation $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + a\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ qui définit le point $M'$ devient $z' - z = -z + a(z_1 - z) + z_2 - z$ c'est à dire

$z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = -(a+1)$ et $\beta = 3a + 2 + i(a+4)$

On reconnaît l'écriture complexe d'une similitude directe plane.

- Si $\alpha = 1$ c'est à dire $a = -2$, $f_a$ est la translation de vecteur, le vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $\beta = 3a + 2 + i(a+4) = -4 + 2i$
- Si $\alpha \neq 1$ c'est à dire $a \neq -2$, $\alpha$ étant réel, $f_a$ est l'homothétie de rapport $-a-1$ et de centre le point $G$ d'affixe $\dfrac{-\beta}{\alpha - 1} = \dfrac{3a+2+i(a+4)}{a+2}$

2.

## EXERCICE 2.

**1. a)** Pour déterminer la solution générale de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

on résoud d'abord l'équation caractéristique $(eq)$ : $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Le discriminant réduit de $(eq)$ est $1 - 2 = -1 = i^2$, donc ses racines sont :

$$r_1 = 1 + i \text{ et } r_2 = 1 - i.$$

La solution générale de $y'' - 2y' + 2y = 0$ est alors $y = \mathrm{e}^x\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles.

**b)** Soient $a, b$ et $c$ des réels.

Si $a, b$ et $c$ sont proportionnels à $1, 2$ et $2$, il existe une constante $k$ non nulle telle que

$$a = 1.k,\ b = 2.k \text{ et } c = 2.k.$$

L'équation $ay'' - by' + cy = 0$ devient alors $k(y'' - 2y' + 2y) = 0$ ou $y'' - 2y' + 2y = 0$ et sa solution générale est bien de la forme $y = \mathrm{e}^x\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles ; d'après le $a$).

Réciproquement, si la solution générale de l'équation

$$ay'' - by' + cy = 0$$

est de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{1x}\ (c_1 \cos 1.x + c_2 \sin 1.x)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles, alors les racines de son équation caractéristique sont $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$.

Le polynôme caractéristique est donc de la forme $k(r - r_1)(r - r_2) = k(r^2 - 2r + 2)$ et l'équation différentielle elle-même aura la forme $k(y'' - 2y' + 2y) = 0$. Par conséquent $(a, b, c) = k(1, 2, 2)$.

**2.** D'après ce qui précède, pour que les solutions de l'équation différentielle

$$ay'' - by' + cy = 0$$

soient des fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles, il faut et il suffit que $a, b$ et $c$ soient proportionnels à $1, 2$ et $2$.

Les triplets possibles sont : $t_1 = (1, 2, 2),\ t_2 = (2, 4, 4)$ et $t_3 = (3, 6, 6)$.

$p(t_1) = p(t_2) = p(t_3) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3$, donc

> la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle
> $$ay'' - by' + cy = 0$$
> soient des fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles est $3\dfrac{1}{6^3} = \dfrac{1}{72}$.

3.

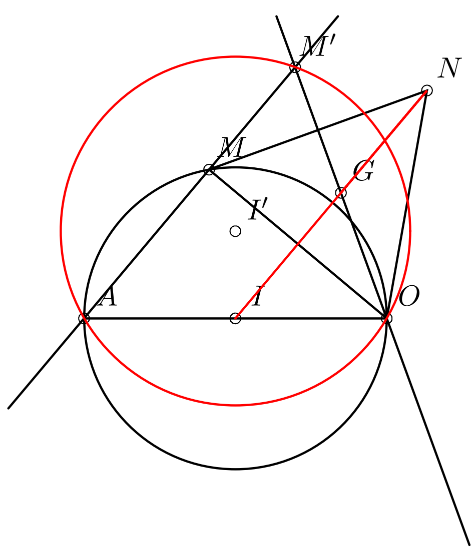
**EXERCICE 3.**

$A$ et $O$ sont deux points du plan. On note $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AO]$ et $I$ le centre de $(\Gamma)$. $M$ est un point de $(\Gamma)$ distinct des points $A$ et $O$.

Le point $N$ est tel que le triangle $MON$ soit équilatéral direct. Le point $G$ est le centre de gravité du triangle $MON$.

Les droites $(AM)$ et $(OG)$ se coupent en un point $M'$.

**1.** Voici la figure demandée.




**2.** $I$ appartient à la médiatrice du segment $[MO]$ car $IM = IO$.

$N$ appartient à la médiatrice du segment $[MO]$ car le triangle $MON$ étant équilatéral, $NM = NO$.

$G$ appartient à la médiatrice du segment $[MO]$ car le triangle $MON$ étant équilatéral, le centre de gravité $G$ vérifie $GM = GO$.

La médiatrice du segment $[MO]$ est donc la droite $(IG)$, par conséquent, la droite $(IG)$ est perpendiculaire à la droite $(MO)$.

En outre la droite $(AM')$ est perpendiculaire à la droite $(MO)$ car le triangle $AMO$ est rectangle en $M$.

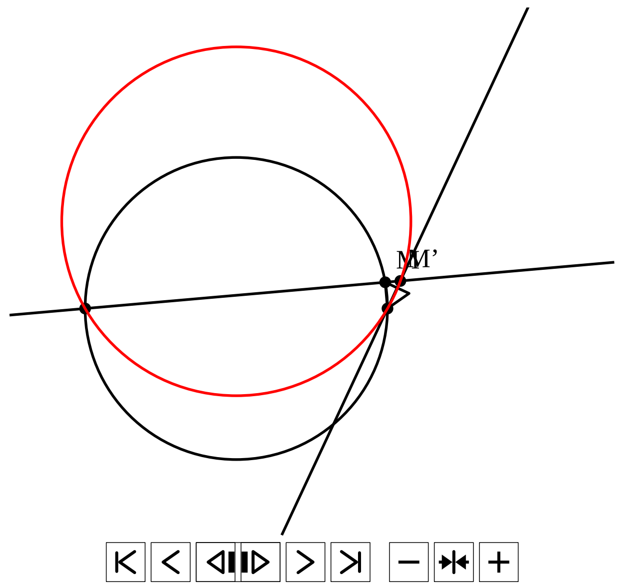



FIGURE 1. Animation

On en déduit que les droites $(IG)$ et $(AM')$ sont parallèles ; et comme $I$ est le milieu de $[AO]$ alors $G$ est le milieu de $[M'O]$.

**3.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe $s$ de centre $O$ transformant $M$ en $M'$.

L'angle de $s$ est $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{6}$

Le rapport de $s$ est $\frac{OM'}{OM} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Puisque le point $M$ décrit le cercle $(\Gamma)$ privé de $A$ et $O$, son image par $s$ décrit le cercle $(\Gamma')$ image de $(\Gamma)$ par $s$ privé de $A' = s(A)$ et $O$ ; $(\Gamma')$ est donc le cercle de centre $I'$ et de rayon $\frac{2\sqrt{3}}{3}\,OI$.

4.

**EXERCICE 4.**

**1. a)** Les restes de la division euclidienne de $3^1,\ 3^2,\ 3^3$ par 13 sont $3,\ 9,\ 1$

**b)** Soit $a = 3^n$ une puissance de 3 avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $n$ par 3, il existe un entier $q$ tel que $n = 3q + r$.

Ce qui entraîne :

$$\begin{array}{lll} & 3^3 & \equiv & 1[13] \\ \Rightarrow & (3^3)^q & \equiv & 1^q[13] \\ \Rightarrow & 3^{3q} \times 3^r & \equiv & 3^r[13] \\ \Leftrightarrow & 3^n & \equiv & 3^r[13] \end{array}.$$

Puisque $0 \leq r \leq 2, 3^r$ vaut $3^0 = 1, 3^1 = 3$ ou $3^2 = 9$.

Les restes de la division euclidienne par 13 des différentes puissances de 3 à exposants entiers naturels sont donc $1, 3$ ou $9$.

**2.** D'après la question précédente, si $r$ est le reste de la division euclidienne de $n$ par 3, alors $3^n \equiv 3^r[13]$

On en déduit que $A_n \equiv 3^r + 3^{2r} + 3^{3r}[13]$.

Si $r = 0$, alors $A_n \equiv 1 + 1 + 1 = 3[13]$ et $A_n$ n'est pas un multiple de 13.

Si $r = 1$, alors $A_n \equiv 3^1 + 3^2 + 3^3 = 39 \equiv 0[13]$ et $A_n$ est un multiple de 13.

Si $r = 2$, alors $A_n \equiv 3^2 + 3^4 + 3^6 \equiv 3^2 + 3^1 + 3^0 = 13 \equiv 0[13]$ et $A_n$ est un multiple de 13.

En résumé pour que $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisible par 13 il faut et il suffit que $n$ ne soit pas un multiple de 3.

**3.** Le nombre 1010100 en base 3 s'écrit :

$$\begin{aligned} & 1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^0 \\ = \; & 3^6 + 3^4 + 3^2 \\ = \; & 3^{3n} + 3^{2n} + 3^n \text{ avec } n = 2 \end{aligned}$$

Comme 2 n'est pas multiple de 3, le nombre 1010100 en base 3 est multiple de 13.

*Vérification :* l'écriture décimale de 1010100 est 819 et on a bien $819/13 = 63$

Le nombre 1001001000 en base 3 s'écrit :

$$\begin{aligned} & 1 \times 3^9 + 1 \times 3^6 + 1 \times 3^3 \\ = \; & 3^{3n} + 3^{2n} + 3^n \text{ avec } n = 3 \end{aligned}$$

Comme 3 est multiple de 3, le nombre 1001001000 en base 3 n'est pas multiple de 13.

*Vérification :* l'écriture décimale de 1010100 est 20439 et on a bien $20439/13 = 1572,230769$

5.

**EXERCICE 5.** $\mathcal{C}$ est la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) & = t\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = -t\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \; t \in [-1,\ 1]$$

**1.** $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$.

Donc $\mathcal{C}$ admet la première bissectrice comme axe de symétrie.

Et on peut choisir $E = [0, 1]$ comme ensemble d'étude des fonctions $x$ et $y$.

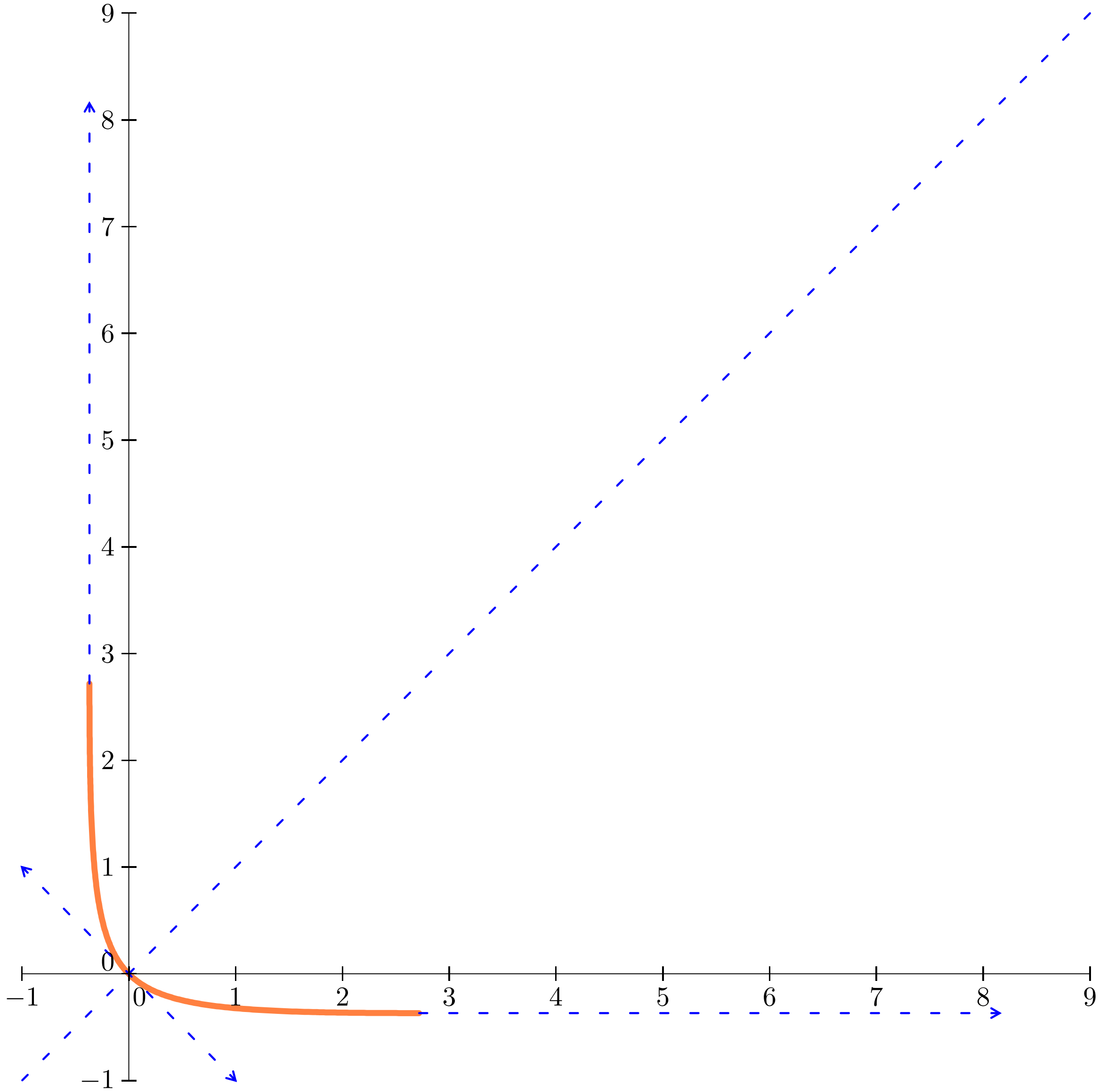
**2.** $\forall t \in [0,\ 1],\ x'(t) = (1 + t)\mathrm{e}^t$ et $y'(t) = (-1 + t)\mathrm{e}^t$.

$x'$ est strictement positif dans $E$, $y'$ est strictement négatif dans $[0, 1[$ et $y'(1) = 0$.

Par conséquent, $x$ est strictement croissante dans $E$ et $y$ est strictement décroissante dans $E$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point de paramètre $t = 0$ est la droite passant par le point de coordonnées $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ et de vecteur directeur, le vecteur de coordonnées $(x'(0), y'(0)) = (\mathrm{e}, -\mathrm{e})$ ; c'est donc la deuxième bissectrice.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point de paramètre $t = 1$ est la droite passant par le point de coordonnées $(x(1), y(1)) = (\mathrm{e}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$ et de vecteur directeur, le vecteur de coordonnées $(x'(1), y'(1)) = (2\mathrm{e}, 0)$ ; autrement dit la droite $\Delta$ d'équation $y = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point de paramètre $t = -1$ est la droite symétrique de $\Delta$ par rapport à la première bissectrice c'est la droite d'équation $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

**3.** Voici la courbe $\mathcal{C}$.


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9