LME
Géométrie affine
Farba Faye

L'originalité des Grecs consiste précisément en un effort conscient pour ranger les démonstrations mathématiques en une succession telle que le passage d'un chaînon au suivant ne laisse aucune place au doute et contraigne l'assentiment universel.

Nicolas Bourbaki

1. Rappels succincts d'algèbre linéaire

1.1. **Espace vectoriel.**

1.1.1. *Définitions et exemples.*

Définition 1.

On appelle *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}-$ espace vectoriel, tout triplet $(E,+,.)$ formé d'un ensemble E et de deux lois de composition $+$ et $.$, ayant les propriétés suivantes :

Ev_1 : La loi $+$ appelée *addition* est une application de $E\times E$ dans E vérifiant :

a_1 : $\forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in E, \overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$.
On dit que la loi $+$ est *associative* .

a_2 : $\forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in E, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.
On dit que la loi $+$ est *commutative* .

a_3 : Il existe un élément de E noté $\overrightarrow{0}$ tel que $\forall \overrightarrow{u}\in E, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.
On dit que $\overrightarrow{0}$ est l'*élément neutre* de l'addition.

a_4 : Pour tout $\overrightarrow{u}\in E$, il existe un élément $\overrightarrow{u}'$ de E tel que

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'=\overrightarrow{u}'+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}.$$

$\overrightarrow{u}'$ est noté $-\overrightarrow{u}$ et est appelé l'*opposé* de $\overrightarrow{u}$.

Ev_2 : La loi $.$ appelée *multiplication* est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E vérifiant :

m_1 : $\forall \overrightarrow{u}\in E, a,b\in\mathbb{K}, a.(b.\overrightarrow{u})=(a\times b).\overrightarrow{u}$
m_2 : $\forall \overrightarrow{u}\in E, a,b\in\mathbb{K}, (a+b).\overrightarrow{u}=a.\overrightarrow{u}+b.\overrightarrow{u}$
m_3 : $\forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in E, a\in\mathbb{K}, a.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=a.\overrightarrow{u}+a.\overrightarrow{v}$
m_4 : $\forall \overrightarrow{u}\in E, 1.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

On résume les propriétés Ev_1 en disant que $(E,+)$ est un *groupe commutatif.*

Les éléments de E sont des vecteurs et $\overrightarrow{0}$ est le *vecteur nul* .

Exemple 1.

1 : $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur lui-même.
Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

est un $\mathbb{R}-$e.v ; la somme étant définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$$

et multiplication par

$$t(x_1, \ldots, x_n) = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

2 : Le point de vue précédent peut être généralisé.
E et F étant deux $\mathbb{R}-$e.v, $E \times F = \{(x_1, x_2), x_1 \in E, x_2 \in F\}$ est un $\mathbb{R}-$e.v ; la somme étant définie par $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ et multiplication par $t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2)$

3 : Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n (entier fixé), E_0 l'ensemble des applications f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ et E_1 l'ensemble des applications f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1$. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-e.v. E_1 est-il un s.e.v de E ?

1.1.2. *Sous espace vectoriel.*

Définition 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une partie F de E appelée *sous-espace vectoriel* (en abrégé s.e.v) de E si elle vérifie :
Sev$_1$: F est non vide
Sev$_2$: $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$; on dit que F est *stable pour l'addition.*
Sev$_3$: $\forall \overrightarrow{u} \in F, t \in \mathbb{R},\ t\overrightarrow{u} \in F$; on dit que F est *stable pour la multiplication par un scalaire.*

Remarque 1.

Un s.e.v contient nécessairement le vecteur nul. En effet, étant non vide, il contient un vecteur $\overrightarrow{u}$ et par Sev$_3$ il contient le vecteur $\overrightarrow{v} = 0.\overrightarrow{u}$.
Mais $\overrightarrow{v} = 0.\overrightarrow{u} = (0+0).\overrightarrow{u} = 0.\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}$, soit en ajoutant $-\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
On peut donc remplacer Sev$_1$ par $\overrightarrow{0} \in F$.

Si F est un s.e.v de E, les restrictions de $+$ et $.$ à $F \times F$ et $\mathbb{R} \times F$ respectivement sont des lois de compositions et $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$e.v.

Exemple 2.
Soit E un $\mathbb{R}-$e.v.

1. Le singleton $\{\overrightarrow{0}\}$ est un s.e.v. de E.
2. L'intersection de deux s.e.v de E est un s.e.v de E.

3. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. alors $\mathbb{R}.\overrightarrow{u} = \{t\overrightarrow{u}, t \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v de E. Si $\overrightarrow{u}$ est non nul, $\mathbb{R}.\overrightarrow{u}$ est appelé « Droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$ »

4. La réunion de deux s.e.v de E n'est pas en général un s.e.v de E.
Par exemple, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires (c'est à dire il n'existe pas de scalaire t tel que $\overrightarrow{u} = t\overrightarrow{v}$), alors $F = \mathbb{R}.\overrightarrow{u} \cup \mathbb{R}.\overrightarrow{v}$ n'est pas un s.e.v de E ; en effet $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent à F mais $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ n'appartient pas à F.

Exercice 1. *Corrigé*

1. *Vérifier que* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x + y = 0\}$ *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$
2. *Démontrer que la réunion de deux s.e.v de E en est un si et seulement si un des s.e.v est contenu dans l'autre.*

1.1.3. *Génération de s.e.v.*

Définition 3.

Une *combinaison linéaire* de n vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \ \overrightarrow{v}_2, \ \ldots, \ \overrightarrow{v}_n$ est un vecteur de la forme

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n$$

où $a_1, \ldots \ a_n$ sont des scalaires.

Théorème et définition 1.

Soit A une partie non vide d'un e.v E. L'ensemble noté $Lin(A)$ ou $vect(A)$ de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A est un s.e.v de E contenant A ; on l'appelle *sous-espace vectoriel de E engendré par A* (on dit aussi que A est un *système générateur* de $Lin(A)$).
On convient que $Lin(\emptyset) = \{\overrightarrow{0}\}$

Démonstration.
$Lin(A)$ est non vide car il contient A.
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux éléments de $Lin(A)$ et t un scalaire.
Il existe $\overrightarrow{u}_1, \ \overrightarrow{u}_2, \ \ldots \ \overrightarrow{u}_n, \ \overrightarrow{v}_1, \ \overrightarrow{v}_2, \ \ldots \ \overrightarrow{v}_m$ dans A, des scalaires $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ tels que

$$\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + a_n\overrightarrow{u}_n \text{ et } \overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{v}_1 + b_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + b_n\overrightarrow{v}_m.$$

alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + a_n\overrightarrow{u}_n + b_1\overrightarrow{v}_1 + b_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + b_n\overrightarrow{v}_m$ combinaison linéaire d'éléments de A est un élément de $Lin(A)$.
$t\overrightarrow{u} = ta_1\overrightarrow{u}_1 + ta_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + ta_n\overrightarrow{u}_n$ combinaison linéaire d'éléments de A est un élément de $Lin(A)$.
Par conséquent, $Lin(A)$ est bien un s.e.v de A. □

Le théorème précédent est une caractérisation *interne* de $Lin\ (A)$.
On peut donner de $Lin\ (A)$ caractérisation *externe* :
$Lin(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.e.v de E contenant A ; c'est donc l'intersection de tous les s.e.v de E contenant A.

En effet, soit F un s.e.v contenant A. et $\overrightarrow{u}$ un élément de $Lin(A)$.
Il existe $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots \overrightarrow{u}_n$, dans A donc dans F, des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + a_n\overrightarrow{u}_n.$$

alors $\overrightarrow{u}$ combinaison linéaire d'éléments de F est un élément de F.

En revanche, comme on l'a déjà remarqué dans l'exemple 2, la réunion de deux s.e.v F et G n'est pas en général un s.e.v de E ; le s.e.v engendré par $F \cup G$ est noté $F + G$ et est appelé *somme des s.e.v* F et de G ; cette notation est heureuse car justement,

Remarque 2.

$$Lin(F \cup G) = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in F,\ \overrightarrow{v} \in G\} = F + G.$$

En effet tout élément du second membre est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc combinaison linéaire d'éléments de $F \cup G$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{u}$ est un élément de $Lin(F \cup G)$, il existe une famille finie $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ d'éléments de $F \cup G$ telle que $\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I}\overrightarrow{u}_i$.

alors, en posant $I_1 = \{i \in I \ : \overrightarrow{u}_i \in F \setminus G\}$ et $I_2 = I \setminus I_1$, on peut écrire :

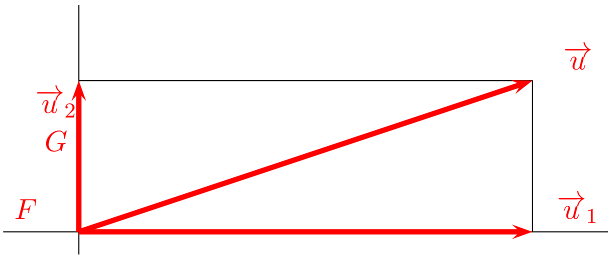
$$\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I_1}\overrightarrow{u}_i + \sum_{i\in I_2}\overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \text{ avec } \overrightarrow{v} = \sum_{i\in I_1}\overrightarrow{u}_i \in F \text{ et } \overrightarrow{w} = \sum_{i\in I_2}\overrightarrow{u}_i \in G.$$

Définition 4.

Si F et G sont des s.e.v de E tels que $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$, alors $H = Lin(F \cup G)$ est noté $F \oplus G$ et on dit que H est *somme directe* de F et de G.
En particulier si $H = E$, on dit que F et G sont *supplémentaires* ; on écrit donc $E = F \oplus G$ pour signifier que $E = Lin(F \cup G) = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$

Proposition 1.

Si F et G sont des s.e.v de E tels que $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$, alors tout élément $F \oplus G$ *se décompose d'une manière unique* comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.



Démonstration.

L'*existence* de la décomposition découle de la définition.

Unicité : Soient $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}'_1 + \vec{u}'_2$ deux décompositions d'un même élément ; $\vec{u}_1$ et $\vec{u}'_1$ appartenant à F et $\vec{u}_2$ et $\vec{u}'_2$ appartenant à G.

De $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2$ on tire $\vec{u}_1 - \vec{u}'_1 = \vec{u}_2 - \vec{u}'_2$

Le premier membre est un élément de F et le second un élément de G. Puisque $F \cap G = \{\vec{0}\}$, on en déduit que $\vec{u}_1 - \vec{u}'_1 = \vec{u}_2 - \vec{u}'_2 = \vec{0}$ c'est à dire $\vec{u}_1 = \vec{u}'_1$ et $\vec{u}_2 = \vec{u}'_2$; la décomposition est unique.

□

1.1.4. *Bases d'e.v.*

Définition 5 (Indépendance)**.**

On dit que n vecteurs $\vec{u}_1, \ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ sont *indépendants* ou que le système qu'ils forment est *libre* si et seulement si

$$\forall t_1, \ldots\ t_n \in \mathbb{K}, t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow t_1 = \cdots = t_n = 0;$$

Un système non libre est dit *lié* .

cela signifie aussi qu'aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Ceci est donc une généralisation de la non colinéarité : Deux vecteurs sont indépendants si et seulement si il sont non colinéaires.

Un système de n vecteurs $\vec{u}_1, \ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ est lié si et seulement si il existe des scalaires $t_1, \ldots\ t_n$ *non tous nuls* tels que $t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n = \vec{0}$

Il est évident qu'un sous-système d'un système libre est libre.

Un système $\mathcal{U}$ de vecteurs (fini ou non) est dit libre si tout sous-système fini de $\mathcal{U}$ est libre.

Définition 6 (base)**.**

On appelle *base* d'un e.v E un système libre et générateur de E

Exemple 3. *Montrer que* $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *avec* $\vec{e}_1 = (1,0)$ *et* $\vec{e}_2 = (0,1)$ *est une base* $\mathbb{R}^2$ *; c'est la* base canonique *de* $\mathbb{R}^2$

Théorème 1.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base d'un e.v E. alors, tout élément de E s'écrit d'une *manière unique* comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

$$\forall \vec{u} \in E, \ \exists! t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \ : \vec{u} = t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n$$

Le $n-$uplet $(t_1, \ldots, t_n,)$ est le système de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$

Démonstration.

Existence : $\mathcal{B}$ étant générateur de E, tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

Unicité : Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de E et des scalaires $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ tels que

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{u} & = & t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n \\ & = & s_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + s_n\overrightarrow{u}_n\end{array}$$

alors, faisant la différence on a : $(t_1 - s_1)\overrightarrow{u}_1 + \cdots + (t_n - s_n)\overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}$ et comme le système $\mathcal{B}$ est libre, $t_1 - s_1 = 0, \dots, t_n - s_n = 0$ c'est à dire $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$. Les deux combinaisons sont donc identiques. □

Définition 7.

Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il est engendré par une partie finie.

Le but de ce paragraphe est de montrer que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

Théorème 2 (Fondamental)**.**

Soit E un e.v. Si E a un système générateur ayant n vecteurs ; alors tout système ayant un nombre de vecteurs strictement supérieur à n est lié.

Autrement dit, si E contient un système générateur de n vecteurs, alors tout système libre a un nombre de vecteurs $\leq n$

Démonstration par récurrence.

Si $n = 1$, soit $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{u}_1\}$ un système générateur de E et $\mathcal{V}$ un système ayant au moins deux vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$; il existe alors deux scalaires t_1 et t_2 tels que $\overrightarrow{v}_1 = t_1\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{v}_2 = t_2\overrightarrow{u}_1$.

Les deux vecteurs étant distincts, les scalaires t_1 et t_2 ne sont pas tous nuls et les relations précédentes entraînent $t_2\overrightarrow{v}_1 - t_1\overrightarrow{v}_2 = 0$. Le système $\mathcal{V}$ est donc lié.

Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et soit $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n\}$ un système générateur de E, $\mathcal{V}$ un système ayant au moins $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{n+1}$.

il existe des scalaires $(a_{i,j})_{1\leq n, 1\leq j\leq n+1}$ tels que :

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{v}_1 & = & a_{1,1}\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n,1}\overrightarrow{u}_n \\ \overrightarrow{v}_2 & = & a_{1,2}\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n,2}\overrightarrow{u}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \overrightarrow{v}_{n+1} & = & a_{1,n+1}\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n,n+1}\overrightarrow{u}_n\end{array}$$

Si tous les coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{1,n+1}$ sont nuls, alors le système $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{n+1}\}$ est en fait contenu dans l'e.v engendré par les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n$. Le système $\mathcal{V}'$ (et par suite $\mathcal{V}$ qui le contient) est lié d'après l'hypothèse de récurrence.

Si un des coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{1,n+1}$ est non nul, par exemple $a_{1,1}$, alors pour chaque $\overrightarrow{v}_i, i \neq 1$, on écrit une combinaison avec $\overrightarrow{v}_1$ qui ne contient pas $\overrightarrow{u}_1$; il existe des scalaires

$(b_{i,j})_{2\leq n, 2\leq j\leq n+1}$ tels que :

$$\begin{array}{lcl} a_{1,1}\overrightarrow{v}_2 - a_{1,2}\overrightarrow{v}_1 & = & b_{2,2}\overrightarrow{u}_2 + \cdots + b_{n,2}\overrightarrow{u}_n \\ a_{1,1}\overrightarrow{v}_3 - a_{1,3}\overrightarrow{v}_1 & = & b_{2,3}\overrightarrow{u}_2 + \cdots + b_{n,3}\overrightarrow{u}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,1}\overrightarrow{v}_{n+1} - a_{1,n+1}\overrightarrow{v}_1 & = & b_{2,n+1}\overrightarrow{u}_2 + \cdots + b_{n,n+1}\overrightarrow{u}_n \end{array}$$

alors le système $\mathcal{V}'' = \{a_{1,1}\overrightarrow{v}_2 - a_{1,2}\overrightarrow{v}_1, \ldots, a_{1,1}\overrightarrow{v}_{n+1} - a_{1,n+1}\overrightarrow{v}_1\}$ constitué de n vecteurs, est en fait contenu dans l'e.v engendré par les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$. Le système $\mathcal{V}''$ est donc lié d'après l'hypothèse de récurrence :

Il existe des scalaires non tous nuls $t_2, \ldots, t_{n+1}$ tels que

$$t_2(a_{1,1}\overrightarrow{v}_2 - a_{1,2}\overrightarrow{v}_1) + \cdots + t_{n+1}(a_{1,1}\overrightarrow{v}_{n+1} - a_{1,n+1}\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{0}$$

On obtient une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{n+1}$ dans laquelle le coefficient de $\overrightarrow{v}_i$, $i \neq 1$ est $t_i a_{1,1}$; et comme ces coefficients ne sont pas tous nuls, le système $\mathcal{V}'$ (et par suite $\mathcal{V}$) est lié □

Théorème et définition 2 (existence de bases).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si E non réduit au vecteur nul, il admet une base; toutes *les bases de E ont même nombre de vecteurs* . Ce nombre s'appelle la *dimension* de E.

Démonstration.

Existence d'une base :

Soit $\mathcal{U} = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ un système générateur de E.
Si $\mathcal{U}$ est libre, alors c'est une base et c'est fini !
Si $\mathcal{U}$ n'est pas libre, l'un de ses éléments, par exemple $\overrightarrow{u}_n$ est combinaison linéaire des autres.
alors $E = Lin(\mathcal{U}) = Lin(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-1})$.
On itère alors le procédé jusqu'à obtenir un système générateur et libre.
Cette méthode est donc constructive d'une base de E.
Soit $\mathcal{U} = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ et $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p)$ deux bases.
$\mathcal{U}$ étant générateur de E et $\mathcal{V}$ libre, alors $p \leq n$ d'après le théorème 2.
$\mathcal{V}$ étant générateur de E et $\mathcal{U}$ libre, alors $n \leq p$ d'après le théorème 2.
Donc $p = n$ □

Un e.v de dimension 1 est appelé *droite vectorielle* .
Un e.v de dimension 2 est appelé *plan vectoriel* .
On déduit facilement de ce théorème les propriétés suivantes.

Propriétés 1.

Soit E un e.v de dimension finie et $\mathcal{U}$ un système ayant n vecteurs. alors
1 : $\mathcal{U}$ est libre $\Rightarrow n \leq dim\ E$
2 : $\mathcal{U}$ est générateur $\Rightarrow n \geq dim\ E$
3 : $\mathcal{U}$ est une base $\Rightarrow n = dim\ E$
4 : $\mathcal{U}$ est libre et $n = dim\ E \Rightarrow \mathcal{U}$ est une base
5 : $\mathcal{U}$ est générateur et $n = dim\ E \Rightarrow \mathcal{U}$ est une base
6 : $n \geq dim\ E \Rightarrow \mathcal{U}$ est lié

La construction d'une base de E de la manière décrite dans la preuve du théorème 2 part d'un système générateur. Voici une construction qui part d'un système libre.

Théorème 3 (de la base incomplète)**.**

Soit E un e.v de dimension finie et $\mathcal{U}$ un système libre. alors il existe une base de E contenant le système $\mathcal{U}$.

Démonstration.
Si $\mathcal{U}$ est générateur, alors c'est une base et c'est fini!!
Si $\mathcal{U}$ n'est pas générateur, alors son nombre de vecteurs est $< dimE$ et il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ en dehors de $Lin(\mathcal{U})$.
Le système $\mathcal{U} \cup \{\overrightarrow{u}\}$ est libre (le démontrer!).
En itérant le processus, on construira nécessairement un système contenant $\mathcal{U}$ et ayant $dimE$ vecteurs c'est à dire une base de E. □

Remarque 3.

Les éléments qui complètent le système $\mathcal{U}$ peuvent être pris parmi les vecteurs d'une base arbitraire de E.

1.1.5. *Dimension d'un s.e.v.*

Proposition 2.

Soit E un e.v de dimension finie et F un s.e.v de E alors F est de dimension finie et $dim\ F \leq dim\ E$.
Si de plus $dim\ F = dim\ E$ alors $F = E$

Démonstration.
On part d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}_1$ de F et on reprend le principe de la démonstration du théorème 3.
Si $Lin(\overrightarrow{u}_1) = F$, alors F est de dimension 1.
Sinon, il existe un élément $\overrightarrow{u}_2$ de F en dehors de $Lin(\overrightarrow{u}_1)$. Le système $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ est alors libre et contenu dans F.

En itérant le processus, on construit une suite croissante de systèmes libres contenus dans F.

Ce processus aura une fin car le nombre de vecteurs d'un système libre est $\leq dim E$.

Le système libre maximal obtenu est alors une base de F.

Si $dim\ F = dim\ E$, toute base de F est aussi une base de E en tant que système libre ayant $dim\ E$ vecteurs ; donc $E = F$ □

Conséquence 1 (existence de supplémentaire)**.**

Soit E un e.v de dimension finie et F un s.e.v propre de E (c'est à dire $F \neq E$ et $F \neq \{\overrightarrow{0}\}$).
alors F admet un supplémentaire direct c'est à dire il existe un s.e.v G tel que $E = F \oplus G$

Démonstration.

Soit $\mathcal{U}$ une base de F.

Il est possible d'adjoindre à $\mathcal{U}$ un système $\mathcal{V}$ de manière à obtenir une base $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ de E d'après le théorème de la base incomplète.

alors $G = Lin\ (\mathcal{V})$ est un supplémentaire direct de F. □

Proposition 3.

Soit F et G deux s.e.v de dimension finie d'un e.v E (de dimension finie ou non) alors $F + G$ est de dimension finie et

$$dim\ (F + G) = dim\ F + dim\ G - dim\ (F \cap G)$$

Démonstration.

$F \cap G$, s.e.v de F qui est de dimension finie, est aussi de dimension finie, en vertu de la proposition 2.

On choisit alors une base $\mathcal{U} = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ de $F \cap G$ que l'on complète en une base

$$\mathcal{V} = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p) \text{ de } F$$

et en une base

$$\mathcal{W} = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n, \overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q) \text{ de } G.$$

$\mathcal{R} = \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ est une base de $F + G$.

En effet, soit $t_1, \ldots, t_n, r_1, \ldots, r_p, s_1, \ldots, s_q$ des scalaires tels que

$$t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n + r_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + r_p\overrightarrow{v}_p + s_1\overrightarrow{w}_1 + \cdots + s_q\overrightarrow{w}_q = \overrightarrow{0}$$

$$\text{alors } -s_1\overrightarrow{w}_1 - \cdots - s_q\overrightarrow{w}_q = t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n + r_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + r_p\overrightarrow{v}_p \quad (*)$$

est un élément de G et de F, donc de $F \cap G$; c'est donc une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{U}$: il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$-s_1\overrightarrow{w}_1 - \cdots - s_q\overrightarrow{w}_q = \alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u}_n$$

c'est à dire
$$s_1\overrightarrow{w}_1 + \cdots + s_q\overrightarrow{w}_q + \alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}.$$
Par conséquent, $s_1 = \cdots = s_q = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, puisque le système $\mathcal{W}$ est libre.

La relation $(*)$ entraîne alors que $t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n + r_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + r_p\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $t_1 = \cdots = t_n = r_1 = \cdots = r_p = 0$, puisque le système $\mathcal{V}$ est libre.

$\mathcal{R}$ est donc libre.

Soit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ un élément de $F+G$, avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$. alors $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{V}$ et $\overrightarrow{v}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{W}$; donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ est donc générateur de $F+G$.
$$\begin{array}{rcccl} dim\ (F+G) & = & card\ \mathcal{R} & = & card\ \mathcal{V} + card\ \mathcal{W} - card\ (\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) \\ & = & (p+n)+(q+n)-n & = & dim\ (F) + dim\ (G) - dim\ (F\cap G) \end{array}$$
NB. Si $F \cap G$ est réduit au vecteur nul, on choisit pour $\mathcal{R}$ la réunion d'une base de F et d'une base de G.

La relation de la proposition devient $dim\ (F \oplus G) = dim\ (F) + dim\ (G)$ □

Exercice 2.

Soient E l'e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n (entier fixé), E_0 le s.e.v de E constitué des éléments f de E telles que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-e.v. de dimensions finies et en déterminer des bases

1.2. Applications linéaires.

1.2.1. *Définitions et exemples.*

Définition 8.

Soit E et F deux e.v et f une application de E dans E'.

1. *On dit que f est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou une application linéaire si elle vérifie les conditions suivantes :*
a. $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$ *pour tous* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$
b. $f(t\overrightarrow{u}) = tf(\overrightarrow{u})$ *pour tous* $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in E$

2. *On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E, forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, isomorphisme de E dans E' toute application linéaire bijective de E dans E' et automorphisme de E toute endomorphisme bijectif de E.*
S'il existe un isomorphisme de E dans E', on dit que E et E' sont des espaces vectoriels isomorphes .

3. *On note $L(E, E')$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E', E^* l'ensemble $L(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires de E (il est appelé le dual de E), $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (qui appelé groupe linéaire).*

Exemple 4.

1. *Soit E un espace vectoriel, l'application id_E identité de E dans E est linéaire. C'est un automorphisme de E.*

2.

Exercice 3.
Montrer que pour tout $f \in L(E, E')$ et tout $\overrightarrow{u} \in E$,

$$f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} \text{ et } f(-\overrightarrow{u}) = -f(\overrightarrow{u})$$

1.2.2. *Opérations sur les applications linéaires.*

Définition 9.

Soit E et E' deux e.v, f, g deux applications linéaires de E dans E' et t un scalaire.

1. *La somme de f et g est l'application de E dans E' associant à tout $\overrightarrow{u}$ de E le vecteur $f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$. Elle est notée $f + g$.*
Ainsi
$$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ (f + g)(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$$
2. *Le produit de t et f est l'application de E dans F associant à tout $\overrightarrow{u}$ de E le vecteur $t.f(\overrightarrow{u})$. Elle est notée tf.*
Ainsi
$$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ (tf)(\overrightarrow{u}) = t.f(\overrightarrow{u})$$

Proposition 4.

Soit E, E' et G des $\mathbb{R}-$e.v.

1. *$(L(E, E'), +, .)$ est un $\mathbb{R}-$e.v.*
2. *Si f est un isomorphisme de E dans E', alors f^{-1} est un isomorphisme de E' dans E.*
3. *Si $f \in L(E, E')$ et $g \in L(E', E'')$ alors $g \circ f \in L(E, E'')$. Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

1.2.3. *Applications linéaires et s.e.v.*

Proposition 5 (Image et image réciproque de sous-espaces vectoriels)**.**

Soit E et E' des $\mathbb{R}-$e.v, f un élément de $L(E,E')$, F et F' des s.e.v de E et E' respectivement. alors

1. *$f(F)$ est un s.e.v de E' ; en particulier $Im(f) = f(E)$ est un s.e.v de E'. On l'appelle* image *de f.*
2. *$f^{-1}(F')$ est un s.e.v de E ; en particulier $Ker(f) = f^{-1}(\{\overrightarrow{0}\})$ est un s.e.v de E. On l'appelle* noyau *de f.*

Démonstration.
A faire en exercice. □

Pour qu'une application linéaire f d'un e.v E dans un e.v E' soit surjective. il faut et il suffit naturellement que $Im(f)$ soit égal à E'. Il existe une caractérisation similaire des applications linéaires injectives.

Proposition 6.

Pour qu'une application linéaire f d'un e.v E dans un e.v E' soit injective, il faut et il suffit que $ker(f)$ soit égal à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Démonstration.
$\overrightarrow{u} \in ker(f)$ entraîne $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{0})$; donc si f est injective, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Par conséquent, $ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Réciproquement, si $ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de E,

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) &\Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in ker(f) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Donc f est injective. □

1.2.4. *Applications linéaires et dimension.*

Proposition 7.

Soit E et E' des $\mathbb{R}-$e.v avec E de dimension finie, $\mathcal{U}$ une base de E et f un élément de $L(E,E')$. alors $f(\mathcal{U})$ est un système générateur de $Im(f)$ c'est à dire

$$Im(f) = Lin\,(f(\mathcal{U}))$$

Si de plus f est un isomorphisme, alors $f(\mathcal{U})$ est une base de $f(E) = Im(f) = E'$. E et E' ont donc même dimension.

Démonstration.

$f(\mathcal{U}) \subset f(E) = Im\ (f)$ entraine $Lin\,(f(\mathcal{U}) \subset Im\ (f)$.

Réciproquement, notons $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ la base $\mathcal{U}$.

$\overrightarrow{u'}$ étant un élément de $Im\ (f)$, il existe $\overrightarrow{u}$ dans E tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$ et comme $\mathcal{U}$ est une base de E, il existe des scalaires $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\overrightarrow{u} = t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n$.

Alors $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u}) = f(t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n) = t_1 f(\overrightarrow{u}_1) + \cdots + t_n f(\overrightarrow{u}_n)$ est bien combinaison linéaire des éléments de $f(\mathcal{U})$. Donc $Im\ (f) \subset Lin\,(f(\mathcal{U}))$.

Supposons de plus que f est bijective. alors elle est injective c'est à dire $ker\ (f) = \{\overrightarrow{0}\}$

Pour que $f(\mathcal{U})$ soit une base de $Im\ (f)$, il suffit qu'il soit un système libre.

Soit $t_1, \ldots, t_n$ des scalaires tels que $t_1 f(\overrightarrow{u}_1) + \cdots + t_n f(\overrightarrow{u}_n) = \overrightarrow{0}$.

alors $f(t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n) = \overrightarrow{0}$.

Donc $t_1\overrightarrow{u}_1) + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n$ appartient à $ker\ (f)$ autrement dit $t_1\overrightarrow{u}_1) + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}$ et comme $\mathcal{U}$ est libre, $t_1 = \cdots = t_n = 0$. □

Théorème 4 (Théorème du rang)**.**

Soit E et E' des $\mathbb{R}-$e.v avec E de dimension finie, f un élément de $L(E, E')$. alors $ker(f)$ et $Im(f)$ sont de dimension finie et

$$dim\ E = dim\ ker(f) + dim\ Im(f)$$

Le théorème tire son nom du fait que $dim\ Im(f)$ est aussi appelé rang de f et noté $rg\ (f)$.

Démonstration.

- Si $ker\ (f) = \{\overrightarrow{0}\}$, f est injective, donc c'est un isomorphisme de E sur $Im\ (f)$ et $dim\ E = dim\ Im\ (f)$.

- Si $ker\ (f) = E$, f est identiquement nulle, $Im\ (f) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $dim\ E = dim\ ker\ (f)$.

- Si $ker\ (f)$ est un s.e.v propre de E, il admet un supplémentaire direct G selon la conséquence de la proposition 2.

Montrons que $\tilde{f}$, restriction de f à G est un isomorphisme de G sur $Im\ (f)$, d'où l'on déduira que $dim\ E = dim\ ker\ (f) + dim\ G = dim\ ker\ (f) + dim\ Im\ (f)$.

Soit $\overrightarrow{u} \in ker\ (\tilde{f})$. Alors $\overrightarrow{u} \in G$ et $\tilde{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Par conséquent $\overrightarrow{u} \in G \cap ker\ (f) = \{\overrightarrow{0}\}$. $ker\ (\tilde{f})$ est donc réduit au vecteur nul : $\tilde{f}$ est injective.

Soit $\overrightarrow{u}' \in Im\ (f)$. Il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose en $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_1 \in ker\ (f)$ et $\overrightarrow{u}_2 \in G$.

$\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2) = f(\overrightarrow{u}_1) + f(\overrightarrow{u}_2) = f(\overrightarrow{u}_2) = \tilde{f}(\overrightarrow{u}_2)$.

$\tilde{f}$ est donc surjective.

N.B : Il existe une démonstration faisant intervenir les espaces quotients et une autre dans Wikipedia faisant intervenir une base de $ker\ (f)$ et une base de $Im\ (f)$ □

1.2.5. *Applications linéaires particulières.* Voir : unisciel.fr

Soient un E un $\mathbb{R}-$e.v, et k un scalaire. L'application par f_k de E dans E telle que pour tout $\overrightarrow{u}$ de E, $f_k(\overrightarrow{u}) = k\overrightarrow{u}$ est linéaire. (A faire en exercice).

f_0 est l'application nulle et f_1 l'application identique.

Définition 10 (Homothéties).

Soient un E un $\mathbb{R}-$e.v, et k un scalaire non nul. L'*homothétie* de rapport k est l'application linéaire notée h_k de E dans E telle que pour tout $\overrightarrow{u}$ de E,

$$h_k(\overrightarrow{u}) = k\overrightarrow{u}.$$

Théorème 5.

1. *Soit k un scalaire non nul. L'homothétie h_k de rapport k est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est $h_{1/k}$ de rapport $1/k$.*

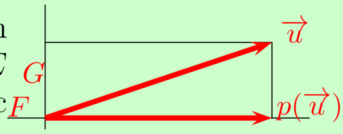
2. *$(\mathcal{H}, \circ)$ ensemble des homothéties de rapport non nul, muni de la composition de applications est un groupe commutatif.*

3. *Pour toute application linéaire f de E dans E et pour tout scalaire k non nul on a $f \circ h_k = h_k \circ f$.*

Démonstration.
Laissée à titre d'exercice. □

Définition 11 (Projections).

Soient E un e.v, F et G des s.e.v propres supplémentaires dans E.
La *projection* sur F parallèlement à G, est l'application notée p de E dans E associant à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E l'unique vecteur $\overrightarrow{u}'$ de F tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{u}''$, avec $\overrightarrow{u}'' \in G$.
L'espace G est appelé la *direction de la projection* .



Proposition 8.

1. *L'application p est linéaire, $\ker p = G$ et $Im\ p = F$.*

2. ***a.*** $\forall \overrightarrow{u} \in F, p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$
b. $p \circ p = p$

Démonstration.

1. *Laissé à titre d'exercice*

2. ***a.*** *si $\overrightarrow{u} \in F$ alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{0} \in G$, donc $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$*
b. *Soit $\overrightarrow{u} \in E$ alors $p(\overrightarrow{u}) \in F$, donc $p\left(p(\overrightarrow{u})\right) = p(\overrightarrow{u})$ d'après le a.*

Donc $p \circ p = p$ □

La propriété b. de la proposition précédente est caractéristique des projections.

Théorème 6.

Soit E un e.v et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$, alors f est une projection.

Une application f d'un ensemble A dans lui-même vérifiant $f \circ f = f$ est dite *idempotente.*

Démonstration.
On va montrer que $Im\ (f)$ et $ker\ (f)$ sont supplémentaires et que f est la projection p de E sur $Im\ (f)$ parallèlement à $ker\ (f)$.
Soit $\overrightarrow{u} \in ker\ (f) \cap Im\ (f)$. alors

$$\overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{u}) \text{ et } \exists \overrightarrow{v} \in E\ :\ \overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{v}).$$

On en déduit $\overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{u}) = f(f(\overrightarrow{v})) = f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$. Donc $ker\ (f) \cap Im\ (f) = \{\overrightarrow{0}\}$ (1).
Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Comme $f\left[\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{u})\right] = f(\overrightarrow{u}) - f\left[f(\overrightarrow{u})\right] = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{u}) \in ker\ (f)$.
Comme on peut écrire :

$$\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{u}) + \left[\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{u})\right] \quad (3),$$

le premier terme du second membre étant dans $Im\ (f)$ et le deuxième terme dans $ker\ (f)$, on a $E = ker\ (f) + Im\ (f)$ (2).
(1) et (2) signifient que $ker\ (f)$ et $Im\ (f)$ sont supplémentaires et la relation (3) montre que
$p(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u})$ c'est à dire $p = f$ □

Définition 12 (Symétries vectorielles)**.**

On appelle *symétrie vectorielle* d'un $\mathbb{R}-$e.v E tout endomorphisme s de E vérifiant :

$$s \circ s = Id_E.$$

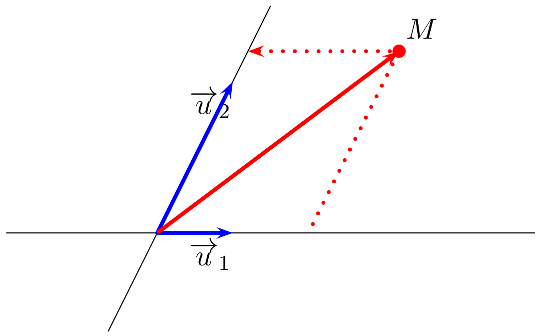
Une application f d'un ensemble A dans lui-même vérifiant $f \circ f = Id_A$ est dite *involutive* .

Théorème 7.

1. *Soit F et G deux s.e.v propres supplémentaires d'un e.v E, p la projection sur F parallèlement à G. alors :*
$s = 2p - Id_E$ *est une symétrie vectorielle,*
$$F = Im\ (s + Id_E),\ G = ker\ (s + Id_E)\ \text{et}\ p \circ s = s \circ p = p.$$

2. *Réciproquement, soit s une symétrie vectorielle d'un e.v E et posons $F = Im\ (s + Id_E)$ et $G = ker\ (s + Id_E)$. alors :*
a. $F = ker\ (s - Id_E)$ *et* $E = F \oplus G$.
b. *Si $s \neq Id_E$ et $s \neq -Id_E$ alors F et G sont des s.e.v propres de E, $p = \dfrac{1}{2}(s + Id_E)$ est la projection sur F parallèlement à G et $p \circ s = s \circ p = p$.*

Dans les conditions du théorème, on dit que s est la symétrie d'*axe* F et de *direction* G.



Exercice 4.
Soient E l'e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n (entier fixé). Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

est une forme linéaire sur E. Déterminer $Im\ \varphi$ et $ker\ \varphi$.

2. Espaces affines

2.1. Définitions et propriétés.

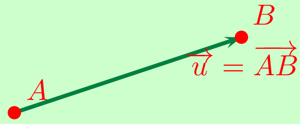
2.1.1. *Définition.*

Définition 13.

Soit E un e.v. Un *espace affine* d'*espace sous-jacent* E est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une application φ de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E qui à $(A,B)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ associe un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ et qui vérifie :

1. $\forall A,B,C\in\mathcal{E},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

2. *Pour tout point A de $\mathcal{E}$, l'application φ_A définie de $\mathcal{E}$ dans E par $\varphi_A(B)=\overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans E.*



Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points .
*L'*espace sous-jacent sera noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
La dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$ est par définition celle de l'espace vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Un espace affine de dimension 0 est réduit en point.
Si l'e.v sous-jacent est une droite (resp. un plan), l'espace affine est appelé *droite affine* (resp. *plan affine).*

Exemple 5.

1. *On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x+y=1$ et E l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x+y=0$.*
   a. *Vérifiez que E est un $\mathbb{R}-$e.v. $\mathcal{E}$ est-il un s.e.v de $\mathbb{R}^2$?*
   b. *On définit φ de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^2$ par*

$$\varphi(A,B)=(x-x',y-y'),\quad \textit{avec } A=(x,y) \textit{ et } B=(x',y')$$

Montrez que $\varphi(\mathcal{E}\times\mathcal{E})$ est inclus dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et que φ définit sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est E.

2. *Soit E un e.v.*
   On peut munir E d'une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est E lui-même ; l'application définissant cette structure étant celle qui à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E\times E$ associe $f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$. Cette structure est appelée structure affine canonique de E.
   C'est dans ce cadre que l'on peut traiter $\mathbb{R}^n$ comme un e.v ses éléments étant appelés vecteurs ou comme espace affine ses éléments étant appelés points.

2.1.2. *Propriétés.*

Propriétés 2.

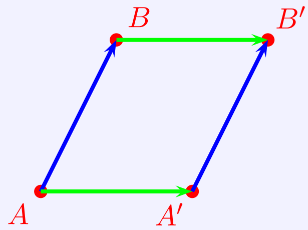
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. *Soit A un élément de $\mathcal{E}$. alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.*

2. *Soit A, B des points de $\mathcal{E}$*
a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$
b. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

3. *Soit A, B, A', B' des points de $\mathcal{E}$. alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
(ii) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.
Si ces conditions équivalentes sont vérifiées et si de plus le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})$ est libre, on dit que $ABB'A'$ est un parallélogramme .



Dans certains livres, le point B est noté $A + \overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté $B - A$.
Il faut bien prendre garde que les signe $+$ et $-$ intervenant dans ces notations ne sont pas des lois de composition internes, c'est pour cette raison que nous n'adopterons pas cette notation.
On a donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow B - A = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow B = A + \overrightarrow{u}$$

Démonstration.

1. *C'est simplement la traduction de « φ_A est surjective. »*

2. *D'après la relation de Chasles appliquée au triplet (A, A, A), on a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$; donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.*
Réciproquement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ c'est à dire $\varphi_A(B) = \varphi_A(A)$; donc $A = B$, puisque φ_A est injective.

3.
$$\begin{array}{llll} & \overrightarrow{AB} & = \overrightarrow{A'B'} & \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} & = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} & \textit{D'après la relation de Chasles} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AA'} & = \overrightarrow{BB'} & \textit{Simplification par } \overrightarrow{A'B} \end{array}$$
$\square$

Définition 14.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie $n, \mathcal{B} = (\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Un *repère* de $\mathcal{E}$ associé à la base $\mathcal{B}$ est un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$.
Les *coordonnées d'un point M* de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont par définition les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$. Le point O est appelé *origine du repère* .

Pour chaque élément $\overrightarrow{u}_i$ de la base $\mathcal{B}$, il existe un unique point A_i tel que $\overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{OA_i}$; on dit alors que $O, A_1, \dots, A_n$ est *un repère affine*

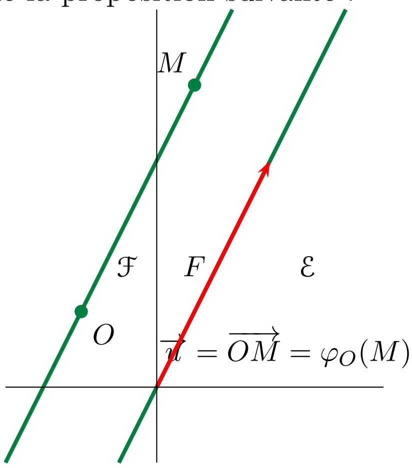
2.2. **Sous-espace affine.**

2.2.1. *Définition.*

Pour définir un sous-espace affine, nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 9.

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine d'e.v sous-jacent $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ correspondant à une application φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ vérifiant : il existe un point O de $\mathcal{F}$ tel que
$F = \varphi_O(\mathcal{F}) = \{\overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{F}\}$ soit un s.e.v de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
alors pour tout O' de $\mathcal{F}$, $\varphi_{O'}(\mathcal{F}) = F$.



Démonstration.
- Montrons que $\varphi_{O'}(\mathcal{F}) \subset F$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un élément $\varphi_{O'}(\mathcal{F})$ c'est à dire tel qu'il existe $M \in \mathcal{F}$ vérifiant $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{u}$.
O' et M appartiennent à $\mathcal{F}$, signifie $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{OM}$ appartiennent à $\varphi_O(\mathcal{F}) = F$; lequel est un s.e.v.
Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$ appartient aussi à F.
- Montrons que $F \subset \varphi_{O'}(\mathcal{F})$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un élément $\varphi_O(\mathcal{F}) = F$ c'est à dire tel qu'il existe $M \in \mathcal{F}$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
O' appartient à $\mathcal{F}$, signifie $\overrightarrow{OO'}$ appartient à $\varphi_O(\mathcal{F}) = F$.
Soit N l'unique point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{O'N} = \overrightarrow{u}$.
Il ne reste plus qu'à montrer que N appartient à $\mathcal{F}$, pour conclure que $\overrightarrow{u}$ appartient à $\varphi_{O'}(\mathcal{F})$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'N} \\ &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{u} \in F \text{ car } F \text{ est un s.e.v de } E \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ON}$ appartient à F, il existe un point P de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$; ce qui entraîne
$N = P \in \mathcal{F}$. □

Théorème et définition 3.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. correspondant à une application φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ s'il existe un point O de $\mathcal{F}$ tel que $\varphi_O(\mathcal{F}) = \{\overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le s.e.v $\varphi_O(\mathcal{F})$ ne dépend pas du point O choisi dans $\mathcal{F}$, il est noté $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et appelé *sous- espace directeur de $\mathcal{F}$.*
On dit alors que $\mathcal{F}$ est le *sous-espace affine passant par O de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ ou (dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{F}}$).*

Remarquons que si F un s.e.v de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et O un point de $\mathcal{E}$, alors le s.espace affine passant par O et ayant pour directeur l'espace F est $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} \ : \overrightarrow{OM} \in F\}$

Exemple 6.
$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x + y = 1\}$ *est un s.espace affine de* $\mathbb{R}^2$ *d'espace directeur*
$\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x + y = 0.\}$

Remarque 4.

Soit $\mathcal{F}$ un s.espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, M et N deux points de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ appartiennent à $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
alors $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
Par conséquent, la restriction de φ à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est à *valeurs dans $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.* Cette restriction confère donc à $\mathcal{F}$ une structure d'espace affine, ce qui justifie l'appellation « sous-espace affine ».

Définition 15.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.
Des points de $\mathcal{E}$ sont dits *alignés* (resp. *coplanaires*) s'ils appartiennent à une même droite affine, (resp. un même plan affine).
Des droites $\mathcal{E}$ sont dites *coplanaires* si elles sont contenues dans un même plan affine.

Théorème 8.

l'intersection *non vide* d'une famille quelconque $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de s.espace affine est un s.espace affine.

De plus $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ a pour directeur $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\mathcal{F}}_i$ c'est à dire $\overrightarrow{\displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i} = \displaystyle\bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\mathcal{F}}_i$

Démonstration.

Soit O un point de l'intersection.

$$\begin{aligned}\text{alors } \varphi_O\Big(\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i\Big) &= \bigcap_{i\in I}\varphi_O(\mathcal{F}_i) && \text{car } \varphi_O \text{ est injective}\\ &= \bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\mathcal{F}}_i && \text{qui est un s.e.v de } \overrightarrow{\mathcal{E}}\end{aligned}.$$

Donc $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ est un s.espace affine d'espace directeur $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\mathcal{F}}_i$ □

- Une intersection de droites est vide ou un s.espace affine de dimension 0 ou 1.

Si la dimension est 0, l'intersection est un point. Dans ce cas on dit que les droites sont *sécantes* , si elles sont au nombre de 2 ; sinon on dit qu'elles sont *concourantes* .

Si la dimension est 1, toutes les droites sont confondues.

- Une intersection de Plans est vide ou un s.espace affine de dimension $0, 1$ ou 2.

Si la dimension est 0 ou 1, l'intersection est un point ou une droite. Dans ce cas on dit que les plans sont sécantes, s'ils sont au nombre de 2 ; sinon on dit qu'elles sont concourants.

Si la dimension est 2, touts les plans sont confondus.

(*Attention!!*).

En général la réunion de deux s.espace affine n'est pas un s.espace affine.
Par exemple dans un plan, la réunion de deux droites distinctes n'est pas un s.espace affine.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux s.espace affine de $\mathcal{E}$

1. *Dans cette question, on suppose que* $\dim \mathcal{E} = 4$.

Soit $\mathcal{U} = (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ une base de E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des plans affines de directions respectives

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} = \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_1 \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_2 \ \text{et}\ \overrightarrow{\mathcal{G}} = \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_2 \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{u}_3$$

Montrer $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est réduit en un point.

2. *On appelle* hyperplan *de* $\mathcal{E}$ *un s.espace affine de dimension* $n-1$.
Dans cette question, on suppose que $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont des hyperplans affines de* $\mathcal{E}$.
a. *Montrer que* $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ *a pour dimension* $n-1$ *ou* n.
b. *En déduire que* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ *a pour dimension* $n-2$ *ou* $n-1$.

3. *Montrer que dans un espace affine de dimension* 3*, l'intersection de deux plans est l'ensemble vide, une droite ou un plan.*

Exercice 6.

Démontrer que la réunion de deux *s.espace affine est un s.espace affine si et seulement si l'un contient l'autre.*

Ce n'est pas vraie pour une réunion quelconque *, par exemple, un plan est la réunion de toutes ses droites !!*

2.2.3. *Génération de s.espace affine.*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. alors la famille $I_{\mathcal{A}}$ des s.espace affine contenant $\mathcal{A}$ est non vide car elle contient $\mathcal{E}$.

Donc d'après le théorème 8, $\displaystyle\bigcap_{\mathcal{F} \in I_{\mathcal{A}}} \mathcal{F}$ est un s.espace affine de $\mathcal{E}$, qui par sa construction, est le plus petit s.espace affine contenant $\mathcal{A}$.

Ce qui justifie la définition suivante :

Théorème et définition 4.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $\mathcal{A}$ une partie *non vide* de $\mathcal{E}$.
alors l'intersection de tous les s.espace affine contenant $\mathcal{A}$ est un s.espace affine contenant $\mathcal{A}$. On *l'appelle sous-espace de* $\mathcal{E}$ *engendré par* $\mathcal{A}$ et on le note $Aff(\mathcal{A})$ ou $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Le « théorème et définition » 4 est une « caractérisation externe du s.espace affine » engendré par une partie non vide.

On verra avec l'introduction des barycentres une « caractérisation interne ».

Remarque 5.

Une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un s.espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{F}$.

Exercice 7.

1. *Soient* A *et* B *deux points distincts d'un espace affine* $\mathcal{E}$. *Montrer que* $Aff\{A, B\}$ *est une droite ayant pour espace directeur* $\mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$. *Elle est appelée droite affine passant par* A *et* B *et notée* (AB) *ou* $\langle A, B \rangle$.

2. *Soient A, B et C trois points non alignés d'un espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que $Aff\ \{A, B, C\}$ est un plan ayant pour espace directeur $\mathbb{R}.\overrightarrow{AB} \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{AC}$. Il est appelée plan affine passant par A, B et C et noté (ABC) ou $\langle A, B, C\rangle$.*

Correction.

1. $\Delta = \{M \in \mathcal{E} \ : \overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}\}$ *est un s.espace affine contenant A et B donc $Aff\ \{A, B\}$. Comme l'espace directeur de $Aff\ \{A, B\}$ contient le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$, sa dimension est ≥ 1.*

De $Aff\ \{A, B\} \subset \Delta$ on tire

$$1 \leq \ dim\ Aff\ \{A, B\} \leq dim\ \Delta = dim\ \mathbb{R}.\overrightarrow{AB} = 1$$

puis $dim\ Aff\ \{A, B\} = dim\ \Delta$; par conséquent,

$$Aff\ \{A, B\} = \left\{M \in \mathcal{E} \ : \overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}\right\}.$$

2. $\Pi = \{M \in \mathcal{E} \ : \overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}.\overrightarrow{AB} \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{AC}\}$ *est un s.espace affine contenant A, B et C donc $Aff\ \{A, B, C\}$.*

Comme l'espace directeur de $Aff\ \{A, B, C\}$ contient les deux vecteurs indépendants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, sa dimension est ≥ 2.

De $Aff\ \{A, B, C\} \subset \Pi$ on tire

$$2 \leq \ dim\ Aff\ \{A, B, C\} \leq dim\ \Pi = dim\ \left(\mathbb{R}.\overrightarrow{AB} \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}\right) = 2$$

puis $dim\ Aff\ \{A, B, C\} = dim\ \Pi$; par conséquent,

$$Aff\ \{A, B, C\} = \left\{M \in \mathcal{E} \ : \overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}.\overrightarrow{AB} \oplus \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}\right\}.$$

□

Puisque, la réunion de deux s.espace affine n'en est pas en général un, il est naturel de chercher une caractérisation du s.espace affine que cette réunion engendre.

Théorème 9.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux s.espace affine de $\mathcal{E}$, A un point de $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{G}$. alors :

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$.
2. *$Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ est les.espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et d'espace directeur $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$*

Démonstration.

1. *S'il existe un point O dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, alors :*
$\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *appartiennent à $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ respectivement donc leur somme $\overrightarrow{AB}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$.*
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$, il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\overrightarrow{F}$, un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{G}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

$\left(A \in \mathcal{F} \text{ et } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathcal{F}}\right) \Rightarrow \exists O \in \mathcal{F} \ : \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AO}$.

La relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *devient* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{v}$ *c'est à dire* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.

$\left(B \in \mathcal{G} \text{ et } \overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}\right) \Rightarrow O \in \mathcal{G}$.

Donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ *qui contient* O *est non vide.*

2. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *et* (AB) *étant contenus dans* $Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$, *leurs directions* $\overrightarrow{\mathcal{F}}, \overrightarrow{\mathcal{G}}$ *et* $\mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$ *sont contenues dans* $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$ *est contenu dans* $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})}$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{u}$ *un élément de* $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})}$. *Il existe un unique point* M *de* $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ *tel que* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$.

Si M *appartient à* $\mathcal{F}$, *alors* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ *appartient à* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ *donc à* $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$

Si M *appartient à* $\mathcal{G}$, *alors* $\overrightarrow{BM}$ *appartient à* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *donc* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ *appartient à* $\mathbb{R}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ *donc à* $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$

Par conséquent, $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})}$ *est contenu dans* $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$. □

Conséquence 2.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux s.espace affine de $\mathcal{E}$, A un point de $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{G}$. alors :

1. *Si* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ *alors* $dim\ \left(Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})\right) = dim\ \mathcal{F} + dim\ \mathcal{G} - dim\ (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ *(Comme pour les s.e.v).*
2. *Si* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ *alors* $dim\ \left(Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})\right) = dim\ \mathcal{F} + dim\ \mathcal{G} - dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}) + 1$

Démonstration.

1. *En prenant pour* A *et* B *un point* O *de* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, *on obtient* $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ *puis* $\dim\ \overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})} = \dim\ \overrightarrow{\mathcal{F}} + \dim\ \overrightarrow{\mathcal{G}} - \dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}})$.
2. *Soit* A *un point de* $\mathcal{F}$ *et* B *un point de* $\mathcal{G}$.

   Puisque $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ *; alors* $(\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}) \cap \mathbb{R}.\overrightarrow{AB} = \{\overrightarrow{0}\}$.

   De $\overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} + \mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$ *on déduit :*

$$\dim\ \overrightarrow{Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})} = \dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}) + \dim\ \mathbb{R}.\overrightarrow{AB} = \dim\ \overrightarrow{\mathcal{F}} + \dim\ \overrightarrow{\mathcal{G}} - \dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}) + 1$$

□

Conséquence 3.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux s.espace affine de $\mathcal{E}$.

Si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$, alors $Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide (donc est un s.espace affine de $\mathcal{E}$)

Si de plus $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}}$, alors $Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un *singleton* .

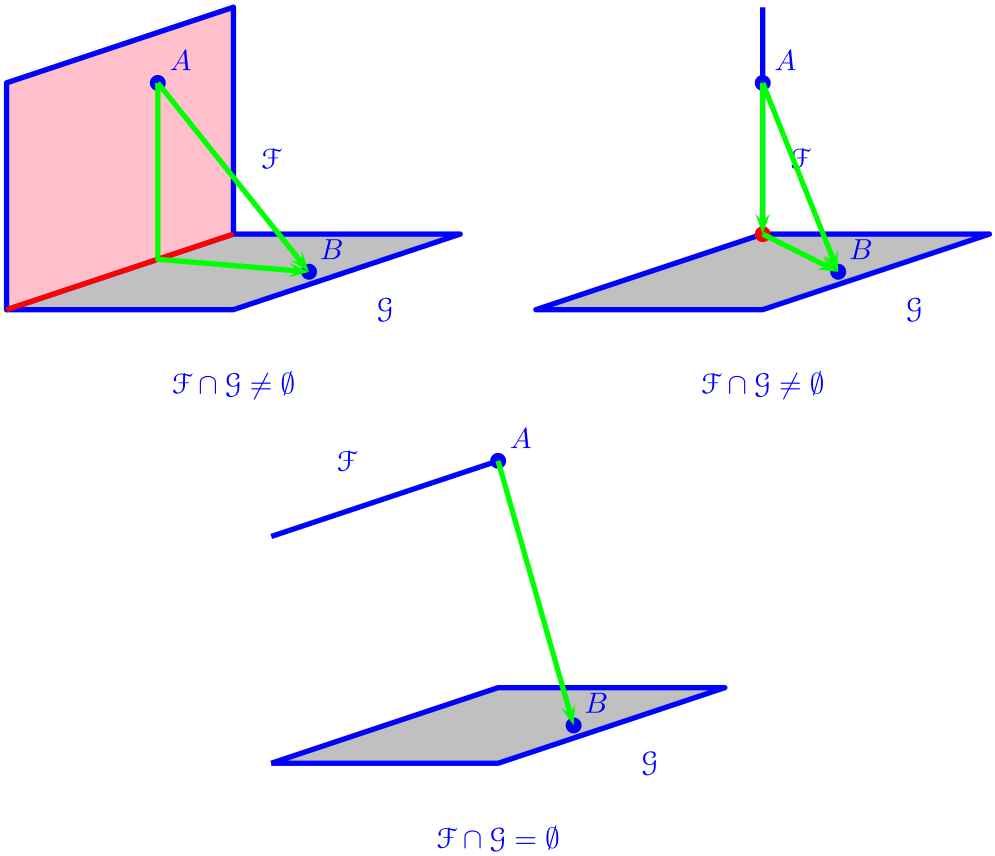


FIGURE 1. $Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$

Démonstration. Soit A un point de $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{G}$. On a $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide d'après le théorème 9.

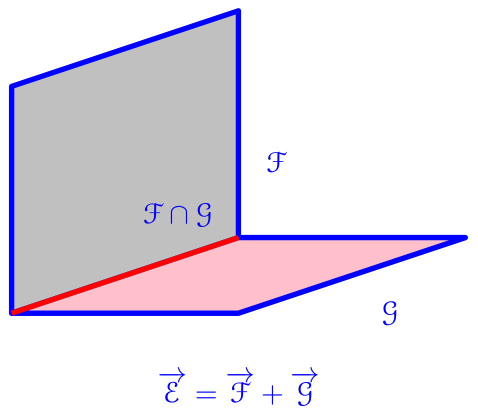
La conséquence 2 du même théorème entraîne alors que

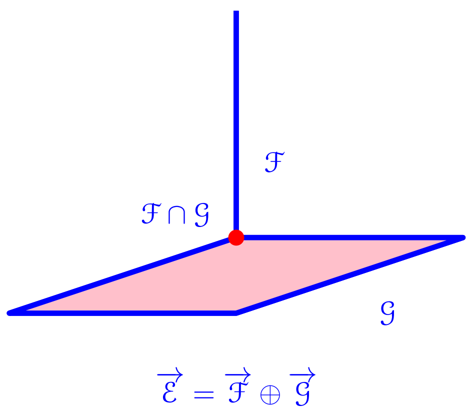
$$dim\ Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = dim\ \overrightarrow{\mathcal{F}} + dim\ \overrightarrow{\mathcal{G}} - dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}) = dim\ (\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}) = dim\ \overrightarrow{\mathcal{E}}. \text{ Donc } Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathcal{E}.$$

Si de plus $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}}$, alors $\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}} = \{\overrightarrow{0}\}$.

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ contenait deux points distincts A et B, alors $\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}$ contiendrait le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$; une contradiction !!

□





2.2.4. *Parallélisme.*

Définition 16.

Deux s.espace affine $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont dits *parallèles* s'ils ont même direction. On note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.
Ils sont dits *strictement parallèles* s'il sont parallèles et distincts.
On dit $\mathcal{F}$ que est *faiblement parallèle* à $\mathcal{G}$ si $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$.

$\odot$

- La relation de parallélisme est une relation d'équivalence.
- La relation de parallélisme faible n'est pas symétrique.

Par exemple, une droite Δ est faiblement parallèle à tout plan Π qui la contient mais Π n'est pas faiblement parallèle à Δ.

2.2.5. *Equation d'un hyperplan.*

Théorème et définition 5.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n, $(O, (\overrightarrow{u_i})_{i\in[\![1,n]\!]})$ un repère de $\mathcal{E}$. Pour tout hyperplan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$, Il existe des scalaires $c, (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que un point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + c$$

L'équation précédente est appelée *équation cartésienne de $\mathcal{P}$* .

Démonstration.
Soit $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u_0}$, supplémentaire direct de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose d'une manière unique en $t\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}'$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}' \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

L'application $f\ :\ \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\overrightarrow{u}) = t$ est une forme linéaire sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dont le noyau est $\mathbb{R}erf = \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Ω étant un point fixé dans $\mathcal{P}$, un point M de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

$\overrightarrow{\Omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \Leftrightarrow f(\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \Leftrightarrow f(\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM}) = 0 \Leftrightarrow f(\overrightarrow{OM}) + f(\overrightarrow{\Omega O}) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u_1})x_1 + \cdots + f(\overrightarrow{u_n})x_n + c = 0$ avec $c = f(\overrightarrow{\Omega O})$. □

Par exemple, dans un espace affine $\mathcal{E}$ dimension 2, une droite $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$, le couple $(-b, a)$ constituant les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Théorème et définition 6 (Critère de parallélisme ou de concourance)**.**

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ un repère de $\mathcal{E}$. 3 droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ de $\mathcal{E}$, d'équations respectives

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2 & = & 0 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

sont concourants ou parallèles si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.

Démonstration.

✓ La nullité de det A est nécessaire.

Si les trois droites sont parallèles, les trois matrices $\begin{pmatrix} -b_i & a_i \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \neq j \leq 3)$ dont les lignes sont les coordonnées de vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j$ ont des déterminants nuls, donc il en va de même de $\det(A)$.

Si les trois droites sont concourantes, il existe un point M_0 de coordonnées $(x0, y0)$ qui appartient aux trois droites ; le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet donc pour solution non triviale le triplet $X = (x_0, y_0, 1)$. Par conséquent, $det(A) = 0$.

✓ La nullité de det A est suffisante.

Si $\det(A) = 0$ alors le système linéaire précédent admet une solution non triviale (x_0, y_0, z_0). Deux cas se présentent : 1^{er} *cas* : il existe un couple (i, j) tel que $(1 \leq i \neq j \leq 3)$ et $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$. alors le couple (x_0, y_0) est solution du système de Cramer : $\left\{ \begin{array}{ccccc} a_ix & + & b_iy & = & c_iz_0 \\ a_jx & + & b_jy & = & c_jz_0 \end{array} \right.$

Si $z_0 = 0$ alors nous trouvons $(x0, y0) = (0, 0)$ (système de Cramer), contredisant le choix de $(x0, y0, z0)$.

Nous avons donc $z_0 \neq 0$ et le triplet $(x_0/z_0, y_0/z_0, 1)$ est solution du système ce qui prouve que les trois droites sont concourantes au point de coordonnées (x_0, y_0).

$2^{ème}$ *cas* : Tous les déterminants $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$, $(1 \leq i \neq j \leq 3)$ sont nuls. Cela signifie que les trois droites ont des vecteurs directeurs colinéaires ; elles sont donc parallèles. $\square$

2.3. **Barycentre.**

Les barycentres jouent dans les espace affine le même rôle fondamental que les combinaisons linéaires jouent dans les e.v.

Dans toute cette sous-section $\mathcal{E}$ est un espace affine.

2.3.1. *Fonction vectorielle de Leibniz.*

Un *point pondéré* est un couple (A, a) élément de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. le scalaire a est le *coefficient de pondération* ou la *masse.* Un système de n points pondérés $(n \in \mathbb{N}^*)$ est une suite $\big((A, a_i)\big)_{1 \leq i \leq n}$; la masse du système est le réel $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Désormais, nous allons adopter la notation plus commode $\left(A_i^{(a_i)}\right)_{1 \leq i \leq n}$ pour représenter le système s.

Définition 17.

On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* associé à un système $s = \left(A_i^{(a_i)}\right)_{1 \leq i \leq n}$ de n points pondérés l'application $\ell_s : M \mapsto \ell_s(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

(Forme réduite)**.**

Soit M et N dans $\mathcal{E}$. $\ell_s(M) - \ell_s(N) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MN}$ Donc

$$\ell_s(M) = \ell_s(N) + a\,\overrightarrow{MN}$$

où a est la masse totale du système. Cette expression est appelée *forme réduite* de ℓ_s.

2.3.2. *Définition du barycentre.*

Théorème et définition 7.

Soit ℓ_s la fonction vectorielle de Leibniz associé à un système $s = \left(A_i^{(a_i)}\right)_{1 \leq i \leq n}$ de n points pondérés. alors :

✓ Si la masse totale du système est nulle, alors ℓ_s est constante.

✓ Si la masse total du système est non nulle, alors il existe un unique point G appelé *barycentre* de s tel que $\ell_s(G) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. On note $G = bar\ s$

Démonstration.
✓ Si la masse totale du système est nulle, la forme réduite de ℓ_s montre que pour tous points M et N de E, $\ell_s(M) = \ell_s(N)$. L'application ℓ_s est donc constante.
✓ Si la masse totale du système est non nulle,
-*Unicité* : Soit G et G' deux points de $\mathcal{E}$ tels que $\ell_s(G) = 0$ et $\ell_s(G') = \overrightarrow{0}$. La forme réduite de ℓ_s montre que $a\overrightarrow{GG'} = 0$, c'est à dire , puisque a est non nul $G = G'$.
-*Existence :* Si la masse total du système est non nulle, en fixant un point O dans E, la forme réduite de ℓ_s montre que l'on devrait avoir pour un point G tel que $\ell_s(G) = \overrightarrow{0}$:

$$\ell_s(O) = a\overrightarrow{OG} \text{ c'est à dire } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{a}\,\ell_s(O) \text{ ou } \varphi_O(G) = \frac{1}{a}\,\ell_s(O)$$

Cette relation définit entièrement le point G car l'application φ_O est *surjective* . □

Remarque 6.

✓ Les points pondérés du système ne sont pas nécessairement distincts.

✓ La relation $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a}\,\ell_s(O)$ qui définit le point G devient $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i\,\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{a}\,\overrightarrow{OA_i}$.

✓ Si les points d'un système s ont la même masse non nulle α, le barycentre G de s est appelé *isobarycentre* de s ; il est défini par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$ (O point quelconque de $\mathcal{E}$) ou encore, en prenant $O = G$: $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i} = 0$.
On voit ainsi qu'il est indépendant de la masse non nulle α ; on peut donc choisir $\alpha = 1$.
L'isobarycentre de deux points M et N est appelé *milieu du bipoint* $\{M, N\}$ et est noté $M * N$

Exercice 8.
Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité si et seulement si

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$$

Correction. Notons G et G' les centres de gravité respectifs de ABC et $A'B'C'$ c'est à dire les points tels que pour tout $O \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ 3\overrightarrow{OG'} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} G = G' &\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

□

2.3.3. *Propriétés du barycentre.*

Proposition 10.

1. *Le barycentre d'un système de points pondérés est indépendant de l'ordre des points.*

2. homogénéité du barycentre : *Etant donné un système $\left(A_i^{(a_i)}\right)_{i\in I}$ (I fini) de points pondérés dont la masse totale est non nulle et un scalaire t non nul, les systèmes $\left(A_i^{(a_i)}\right)_{i\in I}$ et $\left(A_i^{(ta_i)}\right)_{i\in I}$ ont le même barycentre.*

3. Associativité du barycentre. *Soit $s = \left(A_i^{(a_i)}\right)_{1\le i\le n+p}$ (n, p des entiers non nuls) un système de masse non nulle a ; on suppose que les systèmes*
$$s' = \left(A_i^{(a_i)}\right)_{1\le i\le n} \text{ et } s'' = \left(A_i^{(a_i)}\right)_{n+1\le i\le n+p}$$
ont des masses non nulles a' et a''.
Si s, s' et s'' ont pour barycentres respectifs G, G' et G'', alors G est le barycentre du système $(G'^{(a')}, G''^{(a'')})$

Démonstration.

1. *est évident.*

2. *Notons G le barycentre de $\left(A_i^{(a_i)}\right)_{i\in I}$ et G' celui de $\left(A_i^{(ta_i)}\right)_{i\in I}$. alors, O étant un point fixé dans E, on a :*

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\displaystyle\sum_{i\in I} ta_i\,\overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i\in I} ta_i} = \frac{\displaystyle\sum_{i\in I} a_i\,\overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i\in I} a_i} = \overrightarrow{OG}$$

Donc $G = G'$

3. *Remarquons que $a = a' + a''$ et notons H le barycentre de $(G'^{(a')},\ G''^{(a'')})$. alors, O étant un point fixé dans $\mathcal{E}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} &= \frac{a'\,\overrightarrow{OG'} + a''\,\overrightarrow{OG''}}{a' + a''} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\,\overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\,\overrightarrow{OA_i}}{a} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+p} a_i\,\overrightarrow{OA_i}}{a} \\
&= \overrightarrow{OG}
\end{aligned}$$

Donc $G = H$ □

La propriété 2 montre qu'on peut toujours choisir les coefficients de sorte que la masse totale du système soit 1 ; par exemple, le barycentre de $(A_1^{(a_1)},\ A_2^{(a_2)})$ est aussi celui de $(A_1^{(t)},\ A_2^{(1-t)})$ avec $t = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}$.

La propriété 3 signifie que dans la détermination d'un barycentre, on peut remplacer un système s de points pondérés de masse non nulle a par *bar* s, affecté de la masse a. Elle montre notamment que pour connaître le barycentre de plusieurs points, il suffit de connaître le barycentre de 2 points. Elle permet aussi, dans une figure, de mettre en évidence des droites concourantes.

Définition 18.

Soient A et B deux points distincts d'un $\mathbb{R}-$ *espace affine* $\mathcal{E}$.
Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B avec des poids appartenant à $[0, 1]$:

$$\forall M \in \mathcal{E},\ M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1]\ :\overrightarrow{OM} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.(O,\ \text{fixé dans } E)$$

Théorème 10 (Génération interne de s.espace affine)**.**

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$.
alors $\langle\mathcal{A}\rangle$, s.espace affine engendré par $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres de systèmes finis de points pondérés de $\mathcal{A}$.

Démonstration. On va montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des barycentres de systèmes finis de points pondérés de $\mathcal{A}$ est un s.espace affine contenant $\mathcal{A}$ et que c'est le plus petit s.espace affine contenant $\mathcal{A}$.

✓ Que $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$ est évident.

✓ Soit O un point de $\mathcal{A}$ (donc de $\mathcal{B}$).

Pour que $\mathcal{B}$ soit un s.espace affine, il faut et il suffit que $\varphi_O(\mathcal{B})$ soit un s.e.v de E.

* $\overrightarrow{0} = \varphi_O(O)$ appartient à $\varphi_O(\mathcal{B})$.

* Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux éléments de $\varphi_O(\mathcal{B})$.

Il existe M et N dans $\mathcal{B}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$.

M est le barycentre d'un système fini $\left(M_i^{m_i}\right)_{i\in I}$ de points pondérés de $\mathcal{A}$ de masse totale 1.

N est le barycentre d'un système fini $\left(N_j^{n_j}\right)_{j\in J}$ de points pondérés de $\mathcal{A}$ de masse totale 1.

Soit P l'unique point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ ($OMPN$ est un parallélogramme ; faire un dessin !!).

alors $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ est équivalent à :

$$\begin{array}{rcll} P & = & bar\ (M^{(1)}, N^{(1)}, O^{(-1)}) & \text{le prouver !!} \\ & = & bar\ \left(\left(M_i^{m_i}\right)_{i\in I}, \left(N_j^{m_j}\right)_{j\in J}, O^{(-1)}\right) & \text{d'après l'associativité du barycentre.} \end{array}$$

Donc P appartient à $\mathcal{B}$.

Les conditions $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ et $P \in \mathcal{B}$ signifient que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ appartient à $\varphi_O(\mathcal{B})$.

* Achever de montrer que $\varphi_O(\mathcal{B})$ est un s.e.v à titre d'exercice.

- Soit $\mathcal{F}$ un s.espace affine contenant $\mathcal{A}$ et notons F sa direction.

Il faut montrer que $\mathcal{B}$ est contenu dans $\mathcal{F}$.

Soit M un point de $\mathcal{B}$.

M est le barycentre d'un système fini $\left(M_i^{(m_i)}\right)_{i\in I}$ de points pondérés de $\mathcal{A}$ (donc de $\mathcal{F}$) de masse totale 1, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = \displaystyle\sum_{i\in I} m_i \overrightarrow{OM_i}$.

Pour tout indice i de I, $\overrightarrow{OM_i}$ appartient à F car O et M_i sont des points de $\mathcal{F}$; donc $\overrightarrow{OM}$ combinaison linéaire d'éléments du s.e.v F est un élément de F. Par conséquent M appartient à $\mathcal{F}$. $\square$

En appliquant ce théorème à un ensemble n'ayant que 2 ou 3 points on obtient :

(Cas particuliers).

1. *La droite (AB) (respec. le segment $[AB]$) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ (respec. $t \in [0,1]$) avec*
$$M = bar\left(A^{(1-t)}, B^{(t)}\right)$$
ce qui est équivalent à :
$$\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB} \textit{ (le prouver !)}$$
2. *Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ avec*
$$M = bar\left(A^{(1-t-s)}, B^{(t)}, C^{(s)}\right)$$
ce qui est équivalent à :
$$\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \textit{ (le prouver !)}$$

Le théorème 10 permet d'établir une propriété caractéristique des s.espace affine analogue à la définition des s.e.v par stabilité par combinaisons linéaires.

Théorème 11 (Caractérisation des s.espace affine)**.**

Une partie non vide $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un s.espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\forall M, N \in \mathcal{F},\ t \in \mathbb{R},\ bar\ \left(M^{(t)}, N^{(1-t)}\right) \in \mathcal{F}$$

(on dira que $\mathcal{F}$ est stable par « barycentration »)

Le théorème signifie aussi que $\mathcal{F}$ est un s.espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si c'est un singleton ou pour tous points distincts M et N de $\mathcal{F}$, la droite (MN) est contenue dans $\mathcal{F}$.

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{F}$ est un s.espace affine si et seulement si $\mathcal{F} = \langle \mathcal{F} \rangle$.

Supposons que $\mathcal{F}$ soit un s.espace affine et soient $M, N \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}$.

alors, d'après le théorème 10, $bar\ \left(M^{(t)}, N^{(1-t)}\right) \in \langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{F}$.

Réciproquement supposons que $\mathcal{F}$ vérifie la relation du théorème. Soit $s = (A_i^{(a_i)})_{i \in I}$ un système fini de points pondérés de $\mathcal{F}$. Par le théorème d'associativité du barycentre, $bar(s)$ est égal au barycentre de deux points pondérés de $\mathcal{F}$ donc est un point de $\mathcal{F}$.

On en déduit que $\langle \mathcal{F} \rangle \subset \mathcal{F}$ et comme $\mathcal{F} \subset \langle \mathcal{F} \rangle$, on peut conclure que $\mathcal{F} = \langle \mathcal{F} \rangle$ est un s.espace affine □

Exercice 9.

Le centre de gravité *d'un polygone est l'isobarycentre de ses sommets.*

On appelle médiane *d'un triangle, toute droite reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé.*

1. *Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

2. *Démontrer que le centre de gravité d'un tétraèdre appartient aux droites passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée. C'est aussi le point de concours des segments ayant pour extrémités les milieux des côtés opposés.*

Correction.

Soit ABC un triangle, désignons par I, J et K les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ c'est à dire

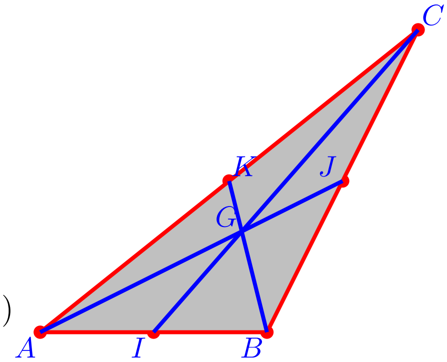
$$I = bar\ (A^{(1)}, B^{(1)}),\ J = bar\ (B^{(1)}, C^{(1)}) \text{ et } K = bar\ (C^{(1)}, A^{(1)})$$

ensuite, par G le centre de gravité de ABC c'est à dire $G = bar\ (A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)})$.

alors d'après propriété 3 (Associativité du barycentre) de la proposition 10,

$$G = bar\ (I^{(2)}, C^{(1)}) = bar\ (J^{(2)}, A^{(1)}) = bar\ (K^{(2)}, B^{(1)})$$

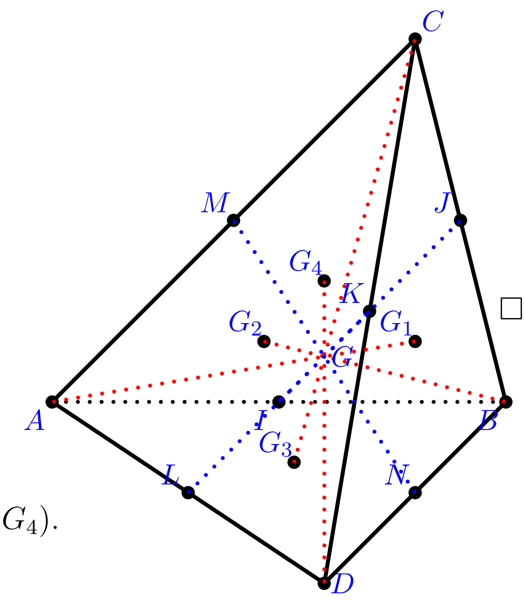
par conséquent G appartient aux droites (CI), (AJ) et (BK) qui sont justement les médianes du triangle.



Soit $ABCD$ un tétraèdre, désignons par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, par G_1, G_2, G_3, G_4, et G les centres de gravité respectifs de BCD, CDA, DAB, ABD, $BCDA$.
alors d'après la proposition 10, G est le barycentre des systèmes suivants :

$$\left(I^{(2)}, K^{(2)}\right),\ \left(J^{(2)}, L^{(1)}\right),\ \left(M^{(2)}, N^{(1)}\right)$$
$$\left(A^{(1)}), G_1^{(3)}\right),\ \left(B^{(1)}, G_2^{(3)})\right)$$
$$\left(C^{(1)}, G_3^{(3)}\right) \text{ et } \left(D^{(1)}, G_4^{(3)}\right);$$

par conséquent G appartient aux droites (IK), (JL), (MN), (AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4).
et de plus c'est le milieu des segments $[IK]$, $[JL]$, $[MN]$



$\square$

2.3.4. *Coordonnées barycentriques.* Une autre façon de repérer les points dans un espace affine consiste à les écrire comme barycentres de points d'un repère : par exemple, si A et B sont deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$, tout point de $\mathcal{D}$ s'écrit comme barycentre de A et B, cette écriture est unique à condition que la masse totale du système soit 1.

Définition 19 (Indépendance)**.**

On dit que $n+1$ points $A_0,\ A_n, \ldots, A_n$ sont *affinement indépendants* ou que le système qu'il forment est *affinement libre* si et seulement si aucun d'entre eux n'appartient au s.espace affine engendré par les autres.
Un système non affinement libre est dit *affinement lié* .

Les points $A_0,\ A_1, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants si et seulement si aucun d'entre eux n'est barycentre des autres points.

Les points $A_0,\ A_n, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants si et seulement si le système $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ (ou la relation analogue en prenant n'importe lequel des A_i comme origine) est libre.

Dans un espace affine de dimension n, les points $O,\ A_1, \ldots, A_n$ d'un repère affine sont affinement indépendants.

Théorème et définition 8 (coordonnées barycentriques)**.**

Soit $A_0,\ A_1,\ldots,A_n$ des points affinement indépendant d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ le s.espace affine de dimension n qu'ils engendrent.
Pour tout point M de $\mathcal{F}$, il existe un unique $n-$uplet $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ de scalaires tel que *pour tout point O de $\mathcal{E}$,*

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n} t_i \overrightarrow{OA_i} \text{ et } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Les scalaires $t_0, \ldots, t_n$ sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère $(A_0,\ A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{F}$.

Démonstration. M est un point de $\mathcal{F}$ signifie que M est un barycentre des points $A_0,\ A_1,\ldots,A_n$. □

✓ Il est intéressant de noter que les cordonnées barycentriques ne dépendent pas du point O.
✓ Un point de l'espace affine de dimension n est localisé par $n+1$ scalaires (de masse totale 1)

Soit A et B deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$. et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite (AB) et $\overline{MN}$ la coordonnée (appelée *mesure algébrique*) du vecteur $\overrightarrow{MN}$ dans la base $\overrightarrow{u}$ de la droite vectorielle $\mathbb{R}.\overrightarrow{AB}$ c'est à dire $\overrightarrow{MN} = \overline{MN}\overrightarrow{u}$.

Soit $(t, 1-t)$ les coordonnées barycentriques d'un point quelconque M de (AB) dans le repère (A, B), c'est à dire $\forall O \in (AB), \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$.
alors $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BA} = -t\overline{AB}\overrightarrow{u}$; donc $t = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BA}}$ et $1-t = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$. D'où :

Remarque 7.

Soit A et B deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$.
Les coordonnées barycentriques d'un point quelconque M de la droite (AB) dans le repère (A, B)sont $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BA}}$ et $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$

Exercice 10.

Soit A, B, C un triangle non aplati et $\mathcal{P}$ le plan défini par ces trois points.
Dans le repère (A, B, C), quelles sont les coordonnées barycentriques A?, B, C ? du centre de gravité G du triangle ? de A', B', C', milieux respectifs de $[B, C], [C, A], [A, B]$?

Théorème 12 (Critère d'alignement de 3 points)**.**

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, A, B, C un repère affine de $\mathcal{E}$.
Trois points M, M' et M'' de $\mathcal{E}$ ayant pour coordonnées barycentriques respectives $(x, y, z), (x', y', z')$ et (x'', y'', z'') sont alignés si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.

Démonstration.
On a $M = Bar(A^{(x)}, B^{(y)}, C^{(z)}), M' = Bar(A^{(x')}, B^{(y')}, C^{(z')})$ et $M'' = Bar(A^{(x'')}, B^{(y'')}, C^{(z'')})$.
Les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si M'' est un barycentre de M et M' c'est à dire si et seulement si il existe α et α' (de masse totale 1) tels que $M'' = Bar(M^{(\alpha)}, M'^{(\alpha')})$. alors l'associativité du barycentre montre que :

$$\begin{aligned} M'' &= Bar(A^{(\alpha x)}, B^{(\alpha y)}, C^{(\alpha z)}, A^{(\alpha' x')}, B^{(\alpha' y')}, C^{(\alpha' z')},) \\ &= Bar(A^{(\alpha x+\alpha' x')}, B^{(\alpha y+\alpha' y')}, C^{(\alpha z+\alpha' z')}) \end{aligned}$$

La masse totale de ce dernier barycentre est 1.
Comme on a aussi $M'' = Bar(A^{(x'')}, B^{(y'')}, C^{(z'')})$, barycentre de masse totale 1, on en déduit :

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha' x' &= x'' \\ \alpha y + \alpha' y' &= y'' \\ \alpha z + \alpha' z' &= z'' \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad A \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'application linéaire associée à la matrice A a donc un noyau non nul ; elle est non injective, donc non bijective c'est à dire $\det A = 0$. $\square$

Remarque 8.

Le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ est appelé *aire algébrique du triangle $MM'M''$* .
Ainsi trois points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si l'aire algébrique du triangle $MM'M''$ est nulle.

Proposition 11 (Equation barycentrique d'une droite)**.**

Soit (A, B, C) un repère du plan affine $\mathcal{E}$, P et P' deux points de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques respectives (p, q, r) et (p', q', r').
alors, un point de coordonnées barycentriques (x, y, z) appartient à la droite (PP') si et seulement si
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0$ c'est à dire $ax + by + cz = 0$ avec $a = qr' - q'r,\ b = -pr' + p'r$ et $c = pq' - p'q$
L'équation $ax + by + cz = 0$ est l'*équation barycentrique de la droite* (PP') dans le repère (A, B, C).

Démonstration. Il suffit d'application le critère d'alignement de 3 points au triplet (P, P', M) □

Théorème 13 (Critère de parallélisme ou de concourance)**.**

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, (A, B, C) un repère affine de $\mathcal{E}$. 3 droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ de $\mathcal{E}$, d'équations barycentriques respectives

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & 0 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & 0 \end{array}$$

sont concourantes ou parallèles si et seulement si la matrice $A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.

Démonstration.
Prenons $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC},)$ comme repère cartésien de $\mathcal{E}$.
Un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}_1$ si et seulement si $M = Bar(A^{(x)}, B^{(y)}, C^{(z)})$ c'est à dire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AC}$.
L'équation $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ est équivalente à $a_1x + b_1y + c_1(1 - x - y) = 0$ c'est à dire
$(a_1-c_1)x+(b_1-c_1)y+c_1 = 0$. Les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ont donc pour équations cartésiennes respectives

$$\begin{array}{ccccccc} (a_1 - c_1)x & + & (b_1 - c_1)y & + & c_1 & = & 0 \\ (a_2 - c_2)x & + & (b_2 - c_2)y & + & c_2 & = & 0 \\ (a_3 - c_3)x & + & (b_3 - c_3)y & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

. □

Or les matrices $A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 & c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 & c_2 \\ a_3 - c_3 & b_3 - c_3 & c_3 \end{pmatrix}$ ont même déterminant (Il suffit, dans le calcul de $det\ (A)$ de remplacer la première colonne par sa somme avec la troisième et la deuxième colonne par sa somme avec la troisième).

$$\begin{aligned} det\ (A') = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad det\ (A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{les trois droites sont concourantes ou parallèes d'après le théorème 6} \end{aligned}$$

3. Applications affines

3.1. Définition et exemples.

Définition 20.

Une application f d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$ est dite *affine* si elle conserve le barycentre c'est à dire si pour tous points A, B dans $\mathcal{E}$ de barycentre G, alors $f(G)$ est le barycentre de $f(A)$ et $f(B)$ *avec les mêmes poids.*

✓ La définition se généralise immédiatement par récurrence au barycentre d'un système fini de points pondérés.

✓ La définition se traduit par :

(1)

$$\forall A, B, G \in \mathcal{E},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (1-t)\ \overrightarrow{GA} + t\ \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow (1-t)\ \overrightarrow{f(G)f(A)} + t\ \overrightarrow{f(G)f(B)} = \overrightarrow{0}.$$

Proposition 12.

Si f est une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$ alors pour tous A, B, C et D dans $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Autrement dit, si f est affine, alors elle conserve le parallélogramme.

Démonstration.

La relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalente à D est le barycentre du système $\left(A^{(-1)}, B^{(1)}, C^{(1)}\right)$.

Si f est affine, alors $f(D)$ est le barycentre du système $\left(f(A)^{(-1)}, f(B)^{(1)}, f(C)^{(1)}\right)$ c'est à dire

$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$ □

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, M et N deux points de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$, d'après la proposition précédente, le vecteur $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ ne dépend que de $\overrightarrow{u}$.

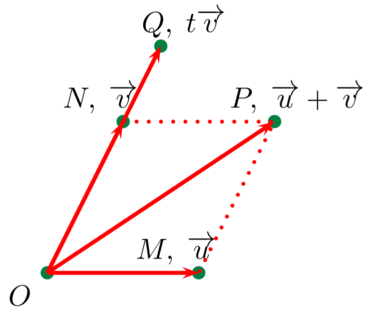
Donc en fixant un point O dans $\mathcal{E}$, on définit une application

$$\overrightarrow{f}\ : \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$$

L'application $\overrightarrow{f}$ est *linéaire* .
En effet, soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ dans E et t un réel, M, N et P les points de E tels que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON} \text{ et } \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$$

de sorte que $OMPN$ est un parallélogramme.
alors d'après la proposition précédente, $f(O)f(M)f(P)f(N)$ est un parallélogramme



c'est à dire $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f(O)f(M)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}$ ou $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$
Et si Q est l'unique point du plan tel que $t\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ c'est à dire $t\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ}$, alors Q est le barycentre du système $\left(O^{(1-t)}, N^{(t)}\right)$. Donc $f(Q)$ est le barycentre du système $\left(f(O)^{(1-t)}, f(N)^{(t)}\right)$ c'est à dire
$\overrightarrow{f(O)f(Q)} = t\overrightarrow{f(O)f(N)}$ ou $\overrightarrow{f}(t\overrightarrow{v}) = t\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$

Propriétés 3 (Caractéristique des applications affines)**.**

Une application f d'un espace affine de $\mathcal{E}$ dans espace affine $\mathcal{E}'$ est affine si et seulement si il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}'$ telle que pour tous M, N dans $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$
L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ est appelée *application linéaire associée à l'application affine f ou partie linéaire de f* .

Démonstration.
Il ne reste plus qu'à montrer que s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ telle que pour tous M, N dans $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$ alors f est affine.
Soit G le barycentre d'un système $(M^{(t)}, N^{(1-t)})$. alors de $(1-t)\overrightarrow{GM} + t\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$ on tire :

$$\overrightarrow{f}\left((1-t)\overrightarrow{GM} + t\overrightarrow{GN}\right) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$$

c'est à dire puisque $\overrightarrow{f}$ est linéaire :

$$(1-t)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GM}) + t\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GN}) = \overrightarrow{0}$$

Par conséquent

$$(1-t)\overrightarrow{f(G)f(M)}) + t\overrightarrow{f(G)f(N)}) = \overrightarrow{0};$$

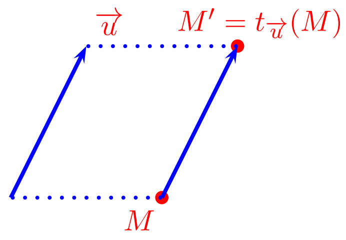
$f(G)$ est donc le barycentre de $\left(f(M)^{(1-t)}, f(N)^{(t)}\right)$ et f est bien affine. □

Exemple 7.

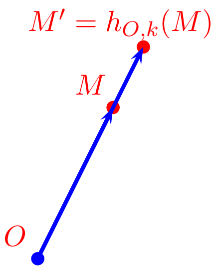
1. *Dès la classe de* $3^{ème}$ *on apprend que les seules applications affines de l'espace affine* $\mathbb{R}$ *dans lui-même sont les applications* $x \mapsto ax + b$, a, b *fixés dans* $\mathbb{R}$ *; leur applications linéaires associées étant les applications* $x \mapsto ax$ *de l'e.v* $\mathbb{R}$ *dans lui-même. (exercice)*

2. *Une application constante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est affine, l'application linéaire associée est l'application nulle.*

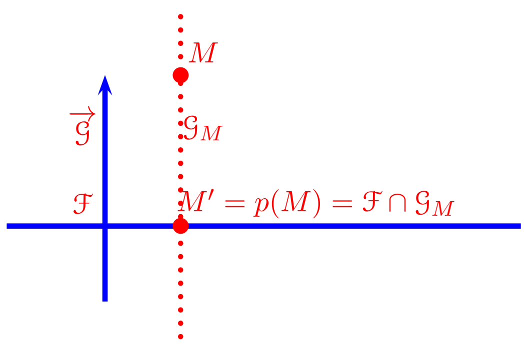
3. Les translations : *Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*
L'application $t_{\overrightarrow{u}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe l'unique point M' de $\mathcal{E}$ vérifiant
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ *est affine, de* partie linéaire l'application identique *de* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ *dans* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
En effet soit M et N deux points de $\mathcal{E}$ et posons
$$M' = t_{\overrightarrow{u}}(M), N' = t_{\overrightarrow{u}}(N) \quad \text{c'est à dire}$$
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}.$$
La règle du parallélogramme montre alors que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ *c'est à dire* $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}(M)\, t_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{MN} = i_E(\overrightarrow{MN})$
Donc $t_{\overrightarrow{u}}$ appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ *est bien affine de partie linéaire $i_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.*



4. Les homothéties : *Soit O un élément de $\mathcal{E}$ et k un scalaire* non nul.
L'application $h_{O,k}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe l'unique point M' de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ est affine, de partie linéaire l'homothétie linéaire $\overrightarrow{h_k}$ de rapport k *de* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ *dans* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
En effet soit M et N deux points de $\mathcal{E}$ et posons
$$M' = h_{O,k}(M), N' = h_{O,k}(N) \quad \text{c'est à dire} \quad \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \text{ et}$$
$$\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}.$$
alors que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ *c'est à dire* $\overrightarrow{h_{O,k}(M)\, h_{O,k}(N)} = \overrightarrow{h_k}(\overrightarrow{MN})$
Donc $h_{O,k}$ appelée homothétie de centre O et de rapport k *est bien affine de partie linéaire $\overrightarrow{h_k}$.*

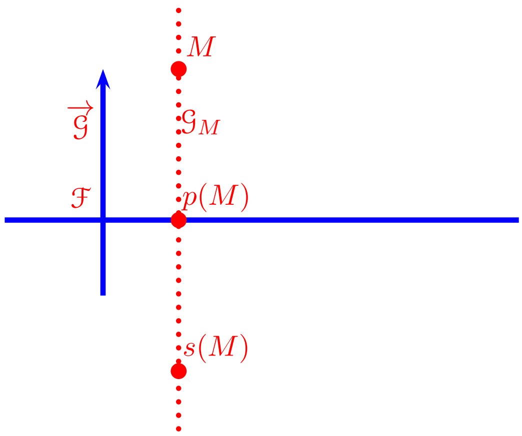


5. Les projections :
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $\mathcal{F}$ un s.espace affine de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
Pour tout point M de $\mathcal{E}$, si on note $\mathcal{G}_M$ le s.espace affine de $\mathcal{E}$ passant par M et de direction $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_M$ est réduit en un point (voir conséquence 2 du théorème 9). L'application p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe l'unique point $p(M) = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}_M$ est affine de partie linéaire $\overrightarrow{p}$ projection de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
Elle vérifie $p \circ p = p$



6. Les symétries axiales :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $\mathcal{F}$ un s.espace affine de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
On note p la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
L'application s de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe l'unique point $s(M)$ de $\mathcal{E}$ tel que $p(M)$ soit le milieu du segment $[M\ s(M)]$ est affine de partie linéaire la symétrie vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ d'axe $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
s est la symétrie d'axe $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
Elle vérifie $s \circ s = I_{\mathcal{E}}$



3.2. **Composition des applications affines.**

Théorème 14 (Le groupe affine)**.**

1. *Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$ et g une application de $\mathcal{E}'$ dans un espace affine $\mathcal{E}''$, alors $g \circ f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}''$.*
De plus si f et g ont pour partie linéaire $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$, la partie linéaire de $g \circ f$ est $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$
2. *L'ensemble $(GA(\mathcal{E}), \circ)$ des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ muni de la composition des applications est un groupe.*

Démonstration.

1. *Cela vient du fait la composée de deux applications linéaires est linéaire ou que f et g conservant les barycentres, leur composée en fait de même.*

2. *Le seul point non trivial est d'établir que f^{-1} est affine.*
Mais, comme f est affine, étant donnés deux points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$ c'est à dire $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$ et en composant par $\overrightarrow{f}^{-1}$:

$$\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f^{-1}(M')f^{-1}(N')}.$$

f^{-1} est donc affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}^{-1}$ □

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Notons $\mathfrak{T}$ l'ensemble des translations, $\mathfrak{H}$ l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{H}}$ l'ensemble des homothéties vectorielles de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Appelons *homothétie-translations* les éléments de $\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}$.

Conséquence 4 (Le groupe des homothétie-translamtions)**.**

$(\mathfrak{T}, \circ)$ et $(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \circ)$ sont des groupes. Plus précisément :

1. *La composée des deux translations de vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

2. *Soit* k *un scalaire différent de* 0 *et de* 1.
La composée de l'homothétie h *de centre* O *rapport* k *et de la translation* t *de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *est une homothétie de rapport* k.
a. *Le centre de* $h \circ t$ *est le point* I *tel que* $\overrightarrow{IO} = \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{u}$.
b. *Le centre de* $t \circ h$ *est le point* J *tel que* $\overrightarrow{JO} = -\dfrac{1}{k^{-1}-1}\overrightarrow{u}$.

3. *La composée* $h \circ h'$ *de deux homothéties* h *et* h' *de centres et rapports respectifs* O, O' *et* k, k' *(nous tous deux égaux à* 1*) est :*
a. *L'homothétie de centre bar* $(O^{(k-1)}, O'^{k(k'-1)})$ *et de rapport* kk' *si* $kk' \neq 1$.
b. *La translation de vecteur* $(k-1)\overrightarrow{OO'}$ *si* $kk' = 1$.

Démonstration.

1. *Cela vient du fait que la partie linéaire d'une translation est l'identité.*

2. *La partie linéaire de* $h \circ t$ *est* $\overrightarrow{h} \circ i_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} = \overrightarrow{h}$ *; donc* $h \circ t$ *est une homothétie de rapport* k.
Son centre est le point I *tel que* $h \circ t(I) = I$. *On a donc* $\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{Ot(I)} = k(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{It(I)}) = k(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{u})$ *; c'est à dire* $\overrightarrow{IO} = \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{u}$.
Pour avoir le centre de $t \circ h$, *on peut remarquer que cette application a le même centre que son inverse* $h^{-1} \circ t^{-1}$ *; alors en appliquant ce qui précède, on voit le centre de* $t \circ h$ *est le point* J *tel que* $\overrightarrow{JO} = -\dfrac{1}{k^{-1}-1}\overrightarrow{u}$.

3. *la partie linéaire de* $h \circ h'$ *est* $\overrightarrow{h}_{k'} \circ \overrightarrow{h}_{k'} = \overrightarrow{h}_{kk'}$ *qui est l'identité si et seulement si* $kk' = 1$ *; d'où* $h \circ h'$ *est une homothétie de rapport* kk' *si* $kk' \neq 1$, *une translation sinon.*
a. *Si* $kk' \neq 1$, *le centre de* $h \circ h'$ *est le point* P *tel que* $h \circ h'(P) = P$. *On a donc*

$$\overrightarrow{OP} = k\,\overrightarrow{Oh'(P)} = k\,(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'h'(P)}) = k\left(\overrightarrow{OO'} + k'\,\overrightarrow{O'P}\right) = k\,(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO'} + k'\,\overrightarrow{O'P});$$

$$\textit{c'est à dire } (k-1)\overrightarrow{PO} + k(k'-1)\overrightarrow{PO'} = \overrightarrow{0} \textit{ ou } P = \textit{bar}\,(O^{(k-1)}, O'^{k(k'-1)})$$

b. *Si* $kk' = 1$ *le vecteur de* $h \circ h'$ *est*

$$\overrightarrow{O'h \circ h'(O')} = \overrightarrow{O'h(O')} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Oh(O')} = \overrightarrow{O'O} + k\overrightarrow{OO'} = (k-1)\overrightarrow{OO'}$$

$\square$

Remarque 9.

La composé de deux homothéties de même centre O est l'identité si les deux homothéties ont des rapports inverses ou une homothétie de centre O $\left(= bar\left(O^{(k-1)}, O^{k(k'-1)}\right)\right)$.
L'ensemble $\mathfrak{H}_O$ des homothéties de *même centre* O est un groupe commutatif.

3.3. Effet d'une application affine sur un s.espace affine.

Proposition 13.

Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$. alors l'image par f d'un s.espace affine de $\mathcal{E}$ est un s.espace affine de $\mathcal{E}$.
Précisément, si $\mathcal{F}$ est le s.espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ passant par un point O, alors $f(\mathcal{F})$ est le s.espace affine de $\mathcal{E}'$ de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathcal{F}})$ passant par un point $f(O)$,

Démonstration. D'après la définition 3, il suffit de montrer que $F' = \left\{\overrightarrow{f(O)M'}, M' \in f(\mathcal{F})\right\}$ est le s.e.v $\overrightarrow{f}(F)$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}'$.
Soit $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}'$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u'} \in F' &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{F} \ : \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{f(O)f(M)} \\
&\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{F} \ : \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{f}(F)
\end{aligned}$$

□

Comme l'image d'un s.e.v F par une application linéaire est un s.e.v de dimension inférieure ou égale à celle de F, on en déduit :

Remarque 10.

✓ L'image d'une droite par une application affine est une droite ou un point.
✓ L'image d'un plan par une application affine est un plan, une droite ou un point.

Exercice 11.
Déterminer les images d'une droite ou d'un plan par une homothétie, une translation, une projection ou une symétrie.

3.4. points fixes d'une application affine.

3.4.1. *Premières propriétés.*

Soit f une application d'un ensemble X *dans lui-même.* Un *point fixe* de f est un point x de E tel que $f(x) = x$.

L'ensemble des points fixes de f sera noté $fix\ (f)$.

Proposition 14.

Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même.
L'ensemble $fix\ (f)$ des points fixes de f est vide ou bien est un s.espace affine de $\mathcal{E}$ de direction
$\mathbb{K}er(\overrightarrow{f} - Id_E) = fix\ (\overrightarrow{f})$, s.e.v de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs fixés par $\overrightarrow{f}$.

Démonstration. Si l'ensemble $fix\ (f)$ des points fixes de f est non vide, il contient un point O.

D'après la définition 3, il suffit de montrer que $F = \left\{\overrightarrow{OM}, M \in fix\ (f)\right\}$ est égal au s.e.v $\mathbb{K}er(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{u} \in F & \Leftrightarrow & \exists M \in fix\ (f)\ :\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} & \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f(O)f(M)} & \text{car } O \text{ et } M \text{ sont fixés par } f \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) & \text{car } f \text{ est affine} \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) & \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{u} \in \mathbb{K}er(\overrightarrow{f} - Id_E) & \end{array}$$

□

Exercice 12.

Quels sont les points fixes d'une translation affine, d'une homothétie affine, d'une symétrie affine, d'une projection affine ?

Théorème 15.

Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ *de dimension finie* dans lui-même. alors, f admet un unique point fixe si et seulement si $fix\,(\overrightarrow{f}) = \mathbb{K}er(\overrightarrow{f} - Id_E) = \{\overrightarrow{0}\}$

Démonstration.

$$fix\ (f) = \text{ un singleton } \Leftrightarrow\ dim\ fix\ (f) = 0 \Rightarrow dim\ fix\ (\overrightarrow{f}) = 0 \Leftrightarrow fix\,(\overrightarrow{f}) = \{\overrightarrow{0}\}$$

Réciproquement, si $fix\,(\overrightarrow{f}) = \mathbb{K}er(\overrightarrow{f} - Id_E) = \{\overrightarrow{0}\}$, alors $\overrightarrow{f} - Id_E$ est injective, donc surjective puisque $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est *de dimension finie.* Fixons un point O dans $\mathcal{E}$. $\overrightarrow{f} - Id_E$ étant surjective, le vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$ a un antécédent $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$. Comme il existe un unique point A vérifiant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, on a :

$$\begin{array}{rlcl} & \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{f(O)O} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} & = & \overrightarrow{f(O)O} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{f(O)f(A)} - \overrightarrow{OA} & = & \overrightarrow{f(O)O} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{f(O)f(A)} & = & \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{f(O)f(A)} & = & \overrightarrow{f(O)A} \\ \Leftrightarrow & f(A) & = & A \end{array}$$

Ainsi, $fix\ (f)$ est non vide ; donc c'est un singleton puisque sa dimension est $dim\ fix\ (\overrightarrow{f}) = 0$ □

Lemme 1.

Soient g une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Les applications g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent si et seulement si $\overrightarrow{u}$ appartient à $fix\ (\overrightarrow{g}) = \mathbb{R}er(\overrightarrow{g} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rlcl} & g \circ t_{\overrightarrow{u}} & = & t_{\overrightarrow{u}} \circ g \\ \Leftrightarrow & \forall M \in \mathcal{E}, g\big(t_{\overrightarrow{u}}(M)\big) & = & t_{\overrightarrow{u}}\big(g(M)\big) \\ \Leftrightarrow & \forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{g(M)g\big(t_{\overrightarrow{u}}(M)\big)} & = & \overrightarrow{u} \\ \Leftrightarrow & \forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{Mt_{\overrightarrow{u}}(M)}\big) & = & \overrightarrow{u} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) & = & \overrightarrow{u} \end{array}$$

□

3.4.2. *Théorème de décomposition.*

Théorème 16.

Si une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ vérifie :

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} = ker\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}) \oplus Im\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}).$$

alors f s'écrit de manière unique $t_{\overrightarrow{u}} \circ g$, où

1. *le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *appartient à* $ker\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$.
2. g *est une application affine admettant au moins un point fixe,*
3. g *et* $t_{\overrightarrow{u}}$ *commutent.*

Démonstration.

✓ *Existence :*

Notons $\overrightarrow{p}_1$ la projection de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur le facteur $ker\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ parallèlement au facteur $Im\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$.

Pour tous point M et N de $\mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} + \overrightarrow{f(N)f(M)} \\ &= \overrightarrow{Nf(N)} + \left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{NM}) - \overrightarrow{NM}\right)\end{aligned}$$

Comme le vecteur entre parenthèses est un élément de $Im\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$, $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{Nf(N)}$ ont la même image par $\overrightarrow{p}_1$.

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}_1\left(\overrightarrow{Mf(M)}\right)$, élément de $ker\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$, est donc indépendant de M. Posons $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$.

alors, par décomposition, pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}$$

Notons A l'unique point de $\mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{w}$.

La relation précédente devient : $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f(A)f(M)}) - \overrightarrow{AM}$ c'est à dire

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Mf(M)} - \overrightarrow{f(A)f(M)}) + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Af(A)})$$

La relation $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ entraîne $g(A) = t_{-\overrightarrow{u}}\left(f(A)\right)$ c'est à dire $\overrightarrow{f(A)g(A)} = -\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f(A)A}$. Donc $g(A) = A$; A est un point fixe de g.

Cette même relation entraîne aussi que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ puis $\overrightarrow{u} \in fix\ (\overrightarrow{f}) = fix\ (\overrightarrow{g})$

Donc d'après le lemme 1, g commute avec $t_{\overrightarrow{u}}$.

✓ *Unicité :* Soit $(\overrightarrow{v}, h)$ un couple vérifiant les conditions du théorème et B un point fixe de h. alors : $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ appartient à $ker\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$. D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{Bf(B)} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(A)} - \overrightarrow{Bf(B)} \\ &= \overrightarrow{f(B)f(A)} - \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BA} \\ &\in Im\ (\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$; ensuite de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ et $t_{\overrightarrow{u}} \circ g = t_{\overrightarrow{v}} \circ h$, on déduit que $g = h$. □

Remarque 11.

Un point A tel que $\overrightarrow{Af(A)}$ appartient à $fix\ (\overrightarrow{f}) = fix\ (\overrightarrow{g})$ est appelé *origine adaptée à f.*

4. Configurations

4.1. Ménélaus-Céva.

4.1.1. *Ménélaus.*

Conséquence 5 (Théorème de Ménélaus)**.**

Soit A, B, C un repère du plan affine $\mathcal{E}$, A', B', C' des points de $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.
alors les points A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \times \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = 1.$$

Démonstration.
L'appartenance des points A', B', C' aux droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement montre que leurs coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C de $\mathcal{E}$ sont de la forme : $(0, a, 1-a), (1-b, 0, b)(c, 1-c, 0)$ avec $a = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}, b = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}, c = \dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BA}}$ (Voir la remarque 7 du théorème et définition 8).

Pour que les A', B', C' soient alignés, il faut et il suffit, d'après le théorème 12 sur l'alignement de 3 points, que

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1-a \\ b & 0 & 1-b \\ c & 1-c & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ c'est à dire que } (1-a)(1-b)(1-c) + abc = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = -1.$$

Cette dernière relation signifie que $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \times \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = 1$

N.B Il existe une démonstration faisant intervenir le théorème de Thalès (voir Wikipedia).

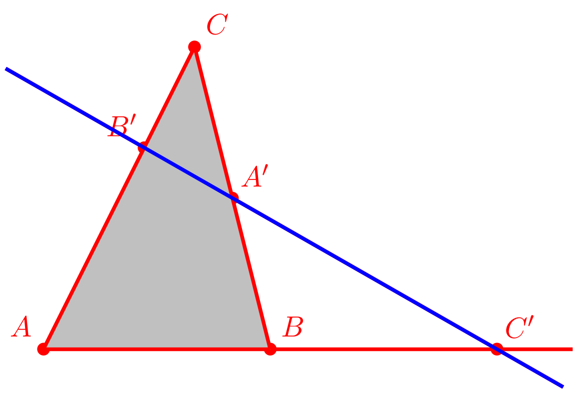


FIGURE 2. Menelaus

□

4.1.2. *Céva.*

Théorème 17 (de Ceva)**.**

Soit A, B, C un repère du plan affine $\mathcal{E}$, A', B', C' des points de $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.
alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \times \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = -1.$$

Démonstration.
L'appartenance des points A', B', C' aux droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement montre que leurs coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C de $\mathcal{E}$ sont de la forme : $(0, a, 1-a), (1-b, 0, b)(c, 1-c, 0)$ avec $a = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}, b = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}, c = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}}$ (Voir la remarque 7 du théorème et définition 8).
les droites (AA'), (BB') et (CC') ont alors pour équations barycentriques respectives :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-b & 0 & b \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ c & 1-c & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{c'est à dire}$$

$$\begin{cases} (1-a)y - az & = & 0 \\ bx - (1-b)z & = & 0 \\ (1-c)x - cy & = & 0 \end{cases}.$$

D'après le théorème 13, pour que ces droites soient parallèles ou concourantes, il faut et il suffit que $\begin{vmatrix} 0 & 1-a & -a \\ -b & 0 & 1-b \\ 1-c & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$ c'est à dire $abc + (1-a)(1-b)(1-c) = 0$ ou $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{acc} = -1$.

Cette dernière relation signifie que $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \times \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = -1$ □

4.2. Thalès, Papus, Desargues.

4.2.1. *Thalès.*

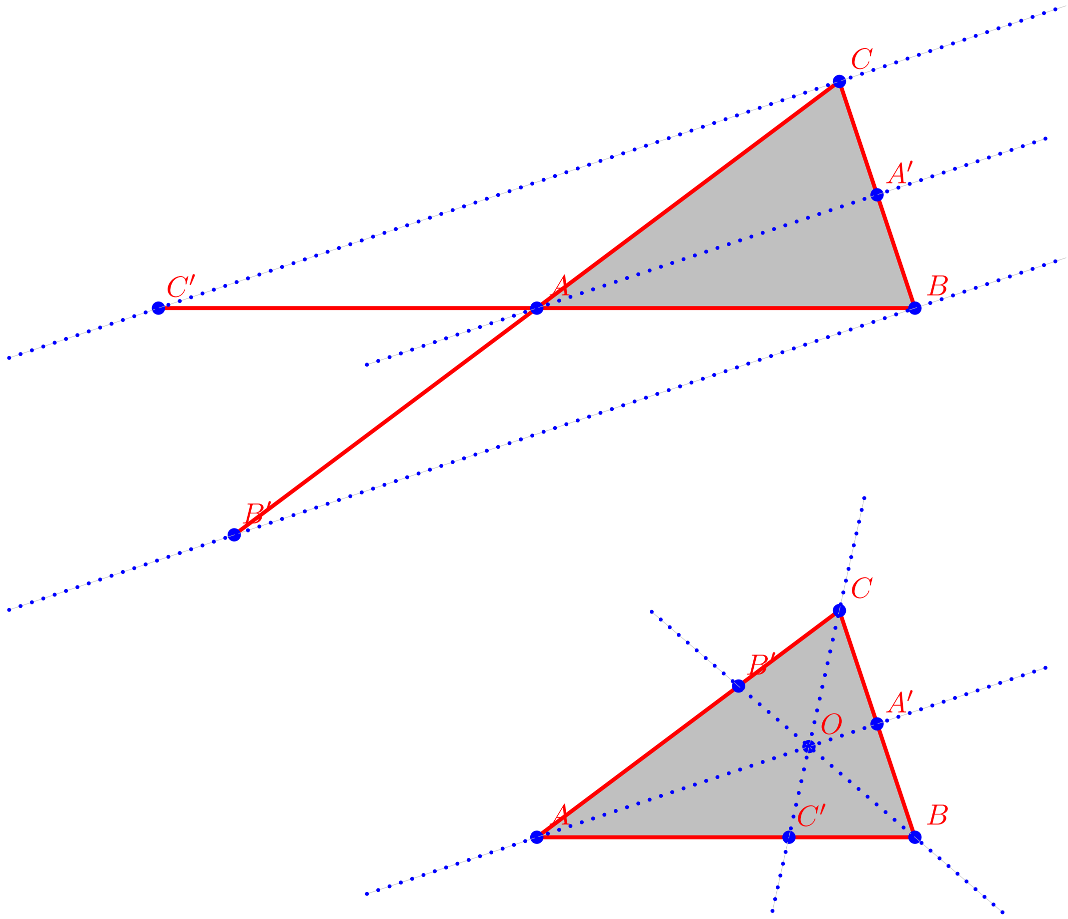


Figure 3. Ceva

Théorème 18 (De Thales)**.**

Soient d, d' et d'' trois droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient, pour A_1, A_1', A_1'' dans $\mathcal{D}_1 \cap d, \mathcal{D}_1 \cap d', \mathcal{D}_1 \cap d''$ respectivement et A_2, A_2', A_2'' dans $\mathcal{D}_2 \cap d, \mathcal{D}_2 \cap d', \mathcal{D}_2 \cap d''$ respectivement. alors on a

$$\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \dfrac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$. alors il est sur d'' (et $B = A_1''$).

Démonstration. [Audin M., page 26]

La projection affine p de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à la direction de d envoie les A_1 sur les A'_i. Comme les A_i sont alignés, on a $\overrightarrow{A_1A''_1} = t\overrightarrow{A_1A'_1}$ avec $t = \dfrac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}}$.

La linéarité de $\overrightarrow{p}$ permet d'écrire :

$$\overrightarrow{A_2A''_2} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{A_1A''_1}) = \overrightarrow{p}(t\overrightarrow{A_1A'_1}) = t\overrightarrow{p}(\overrightarrow{A_1A'_1}) = t\overrightarrow{p(A_1)p(A'_1)} = t\overrightarrow{A_2A'_2}$$

La relation $\overrightarrow{A_2A''_2} = t\overrightarrow{A_2A'_2})$ signifie que $t = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

La réciproque en est une conséquence.

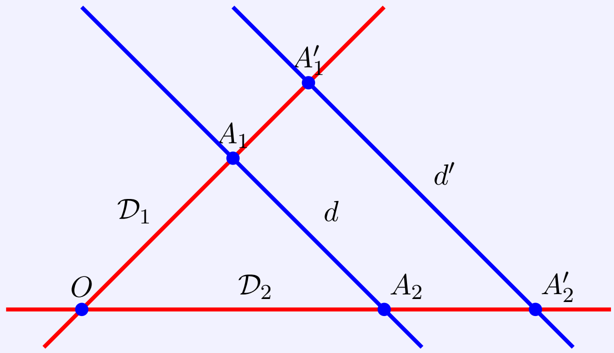
On a $\overrightarrow{A_1A''_1} = \dfrac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}}\overrightarrow{A_1A'_1}$ de sorte que $\overrightarrow{A_1B} = \overline{A_1A''_1}$ et donc que $B = A''_1$ □

Corollaire 1.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes en un point O, d et d' deux droites parallèles coupant $\mathcal{D}_i$ en A_i, A'_i distincts de O. alors

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA'_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA'_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}}$$

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA'_1}} = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OA'_2}}$. alors il est sur d (et $B = A_1$).



Démonstration. On introduit un cas particulier de la configuration de Thalès en considérant la droite passant par O et parallèle à d ; ce qui établit la première égalité recherchée.

On voit aussi ainsi que l'homothétie de centre O qui envoie A'_1 sur A_1 envoie A'_2 sur A_2. Si k est le rapport de cette homothétie, on a $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA'_1}$ et $\overrightarrow{OA_2} = k\overrightarrow{OA'_2}$, puis, en faisant la différence, $\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{A'_1A'_2}$. Donc

$$k = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA'_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA'_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}}$$

.

La réciproque en est une conséquence.

On a $\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OA'_2}}\overrightarrow{OA'_1}$ de sorte que $\overrightarrow{OB} = \overline{OA_1}$ et donc que $B = A_1$.

On remarque que l'utilisation de l'homothétie suffit à elle seule pour établir la relation cherchée. □

4.2.2. *Desargues.*

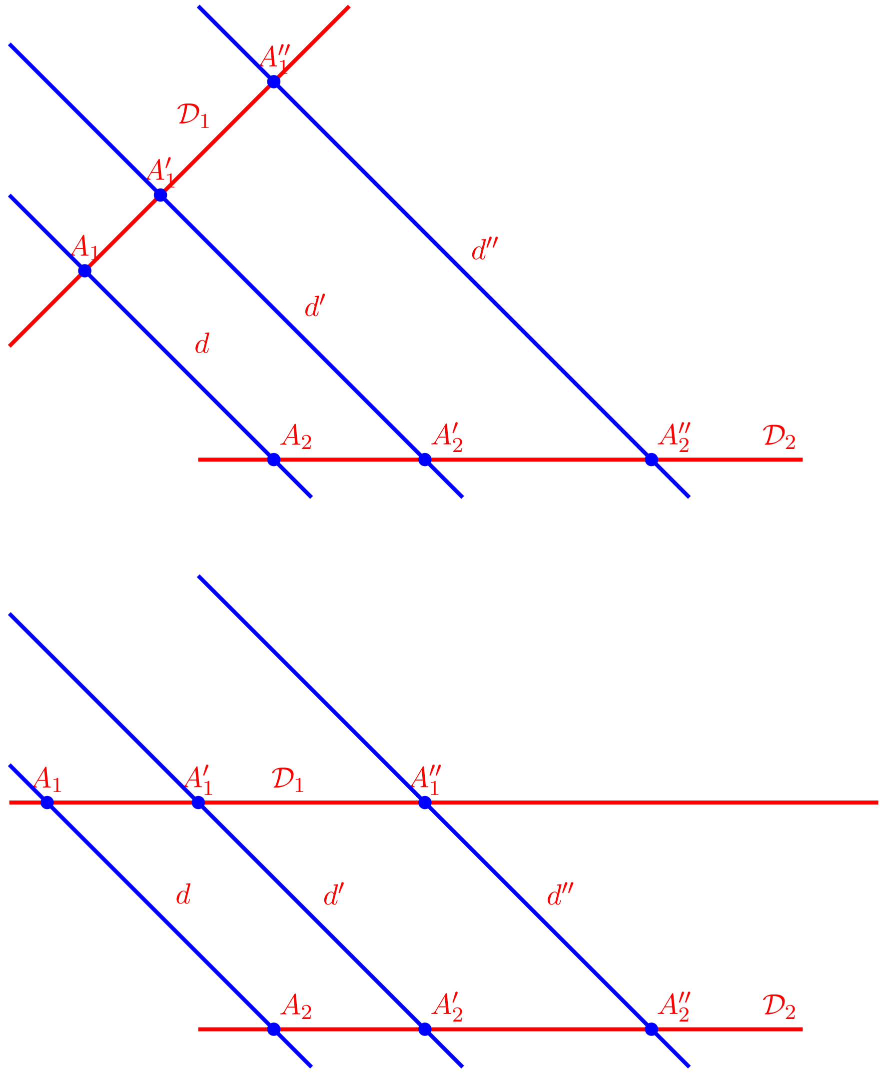


FIGURE 4. Thales

Théorème 19.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démonstration.

✓ Si (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point O, l'homothétie h de centre O qui envoie A sur A' envoie aussi B sur B'.
Notons D l'image de C par h, de sorte que D appartient à la droite (OC).

Antécédent	O	A	B	C
Image par h	O	A'	B'	D

Puisqu'une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, la droite $(B'D)$ est la droite passant par B' et parallèle à la droite (BC) ; c'est donc la droite $(B'C')$. Par conséquent, D appartient à $(B'C')$.

De même, la droite $(A'D)$ est la droite passant par A' et parallèle à la droite (AC) ; c'est donc la droite $(A'C')$. Par conséquent, D appartient à $(A'C')$.

D est donc l'intersection des droites $(A'C')$ et $(B'C')$ c'est à dire le point C.

Ainsi $C' = D$ appartient à (OC).

✓ Si (AA') et (BB') sont parallèles, la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$ envoie B sur B'.

Notons D l'image de C par $t_{\overrightarrow{AA'}}$, de sorte que D appartient à la droite (OC).

Antécédent	A	B	C
Image par $t_{\overrightarrow{AA'}}$	A'	B'	D

Puisqu'une translation transforme une droite en une droite parallèle, la droite $(B'D)$ est la droite passant par B' et parallèle à la droite (BC) ; c'est donc la droite $(B'C')$. Par conséquent, D appartient à $(B'C')$.

De même, la droite $(A'D)$ est la droite passant par A' et parallèle à la droite (AC) ; c'est donc la droite $(A'C')$. Par conséquent, D appartient à $(A'C')$.

D est donc l'intersection des droites $(A'C')$ et $(B'C')$ c'est à dire le point C.

Ainsi $C' = D = t_{\overrightarrow{AA'}}(C)$ et $(AA') = (CC')$ sont parallèles.

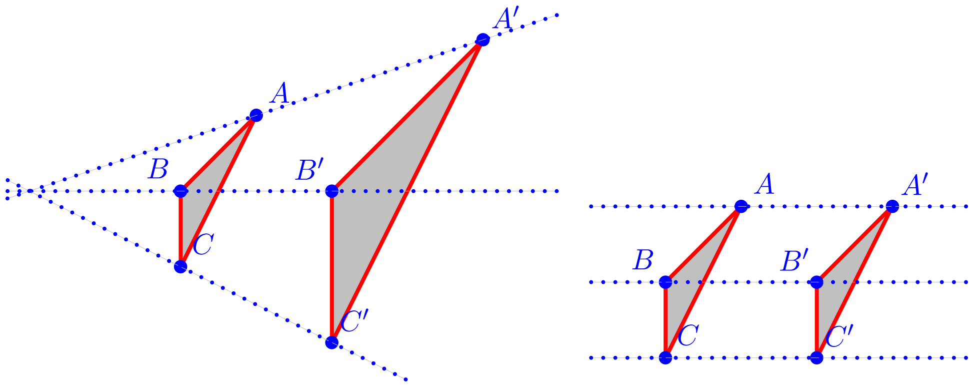


FIGURE 5. Desargues

□

4.2.3. *Pappus.*

Théorème 20.

Soient A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$.

Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à $(C'B)$, alors (AC') est parallèle à (CA').

Démonstration.

✓ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point O.

L'homothétie h' de centre O qui envoie A sur B envoie aussi B' sur A'. L'homothétie h'' de centre O qui envoie B sur C envoie aussi C' sur B'. Puisque h' et h'' ont le même centre, elles commutent. Posons $h = h' \circ h'' = h'' \circ h'$.

alors $h(A) = h'' \circ h'(A) = h''(B) = C$ et $h(C') = h' \circ h''(C') = h'(B') = A'$.

Donc la droite (CA'), image de (AC') par h est bien parallèle à (AC').

✓ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ envoie aussi B' sur A' et la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$ envoie aussi C' sur B'.

alors, puisque $t_{\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$, on a :

$$t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$$
$$\text{et } t_{\overrightarrow{AC}}(C') = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}(C') = t_{\overrightarrow{AB}}(B') = A'.$$

Donc la droite (CA'), image de (AC') par $t_{\overrightarrow{AC}}$ est bien parallèle à (AC').

□

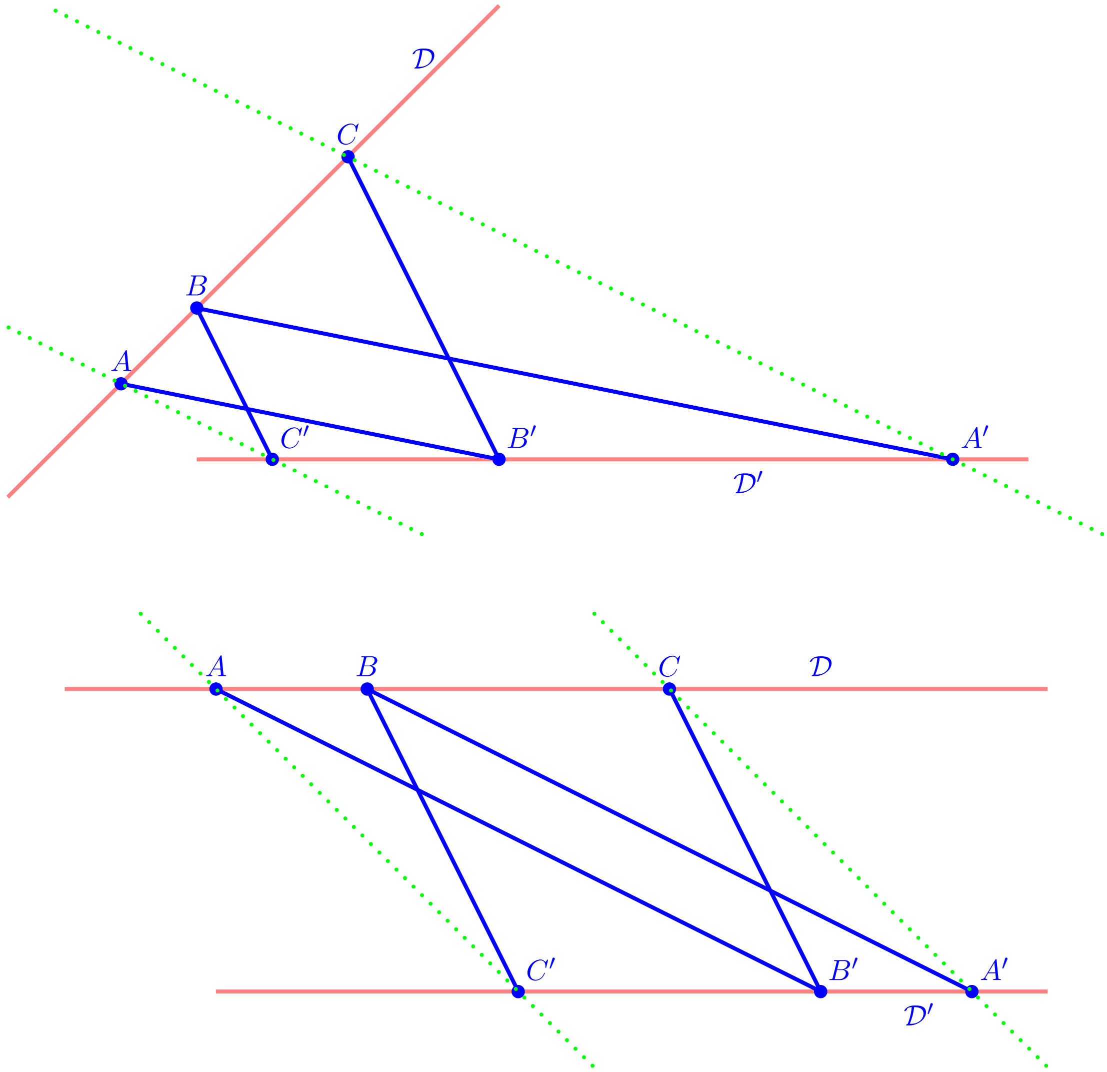


FIGURE 6. Pappus

5. EXERCICES

Exercice 13 (Affinité).

Soit $\mathcal{E}$ *un espace affine réel de direction* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$*. On suppose que* $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}$ *avec* $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ *une droite vectorielle. Soit* $\mathcal{F}$ *un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *de direction* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ *et soit* p *la projection affine sur* $\mathcal{F}$ *parallèlement à* $\overrightarrow{\mathcal{D}}$*.*

Soit k *un réel.*

Pour tout $M \in \mathcal{E}$ *on considère l'unique point* $_k(M)$ *de* $\mathcal{E}$ *tel que* $\overrightarrow{p(M)a_k(M)} = k\,\overrightarrow{p(M)M}$*.*

1. *Montrer que* a_k *est une application affine de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *(on déterminera en particulier sa partie linéaire). Déterminer l'ensemble de ses points fixes.*

a_k *est appelée l'*affinité de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, d'hyperplan $\mathcal{F}$ et de rapport k.

Comment nomme-t-on les affinités de rapport-1 ?

2. *On suppose uniquement pour cette question que $\mathcal{E}$ est le plan affine réel, et $_A ffF$ est une droite affine, appelée dans ce cas axe de l'affinité. Soient A et A' deux points du plan tels que $A \notin \mathcal{F}$ et $(AA') \,|/\mathcal{F}$ Montrer qu'il existe une unique affinité a d'axe $\mathcal{F}$ telle que $a(A) = A'$*

3. *Montrer que la composée $a_k \circ t_{\overrightarrow{u}}$ d'une affinité de rapport $k \neq 1$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une affinité si et seulement si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$*

4. *Une dilatation d'hyperplan $\mathcal{F}$, de rapport k, de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ ($\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}$), est une application linéaire d telle que sa restriction à $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est $I_{\overrightarrow{\mathcal{F}}}$ et sa restriction à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est $k\, I_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$.*
a. *Vérifier que si a est une affinité, alors sa partie linéaire est une dilatation.*
b. *Montrer que si f est une application affine telle que sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une dilatation de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, d'hyperplan $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, alors f est la composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ a$ d'une affinité a de rapport k de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et d'hyperplan $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$.*

5. *Montrer qu'une affinité est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer dans ce cas la nature de son inverse.*

6. *Montrer que la composition de deux affinités de même directions et d'hyperplans parallèles est une affinité où une translation dont on précisera alors le vecteur. Décrire le groupe engendré par les affinités de même direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et d'hyperplans tous de même direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.*

Exercice 14 (Transvection)**.**
Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle transvection tout endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ différent de l'identité tel qu'il existe un hyperplan $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ vérifiant

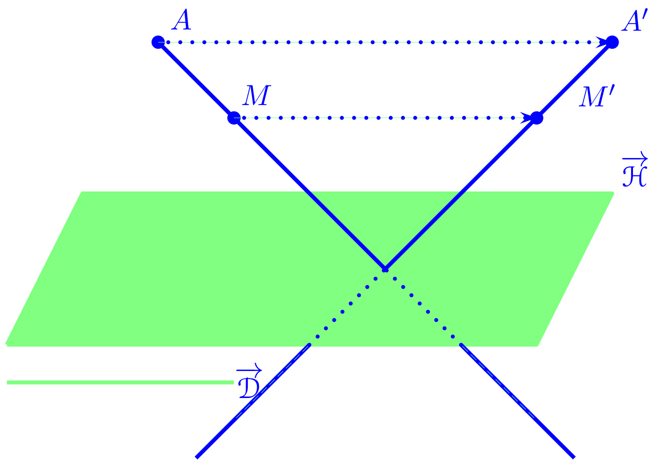
$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \text{ et } \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$$

1. *Une projection sur un hyperplan de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est-elle une transvection ?*

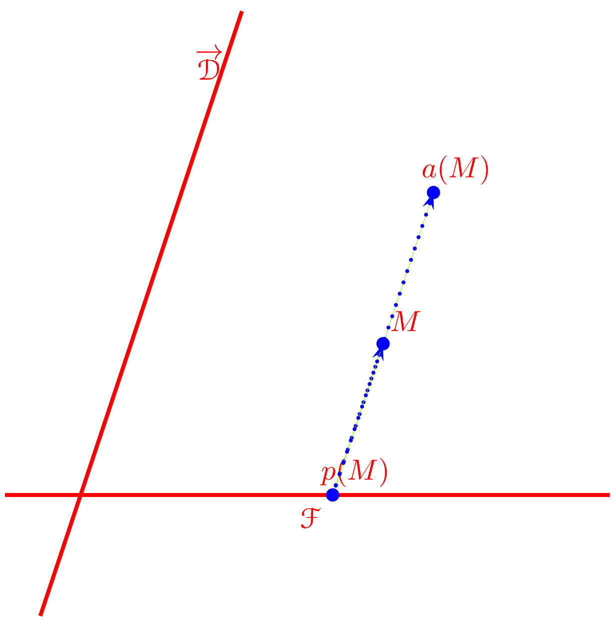
2. ***a.*** *Montrer que, si $\overrightarrow{f}$ est une transvection d'hyperplan $\overrightarrow{\mathcal{H}}$, alors il existe une unique droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ incluse dans $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ telle que, $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ En déduire l'existence d'une forme linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{u}_0$ non nul tel que*

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \mathbb{R}er\overrightarrow{\varphi} \text{ et } \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}_0)\,\overrightarrow{u}$$

3. *Montrer qu'une transvection est inversible et que son inverse est également une transvection.*



Exercice 15. *Montrer que* $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \; : f(x+1) = f(x) + 1 \right\}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *; en déterminer un point et la direction*



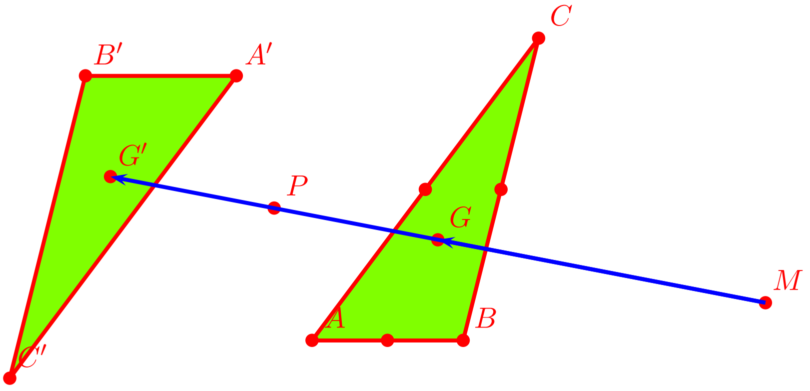
Dans tous les exercices qui suivent, on se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine (A, B, C).

Exercice 16. *Soit* M *un point de* $\mathcal{P}$*. On désigne respectivement par* A', B', C' *les symétriques de* M *par rapport aux milieux des côtés* $[BC], [AC], [BA]$*. On note* G *et* G' *les centres de gravité respectifs des triangles* ABC *et* $A'B'C'$

1. *Montrer que* $\overrightarrow{MG'} = 2\overrightarrow{MG}$.

2. ***a.*** *Montrer que les milieux des segments* $[AA'], [BB'], [CC']$*. sont confondus en un point* P*.*

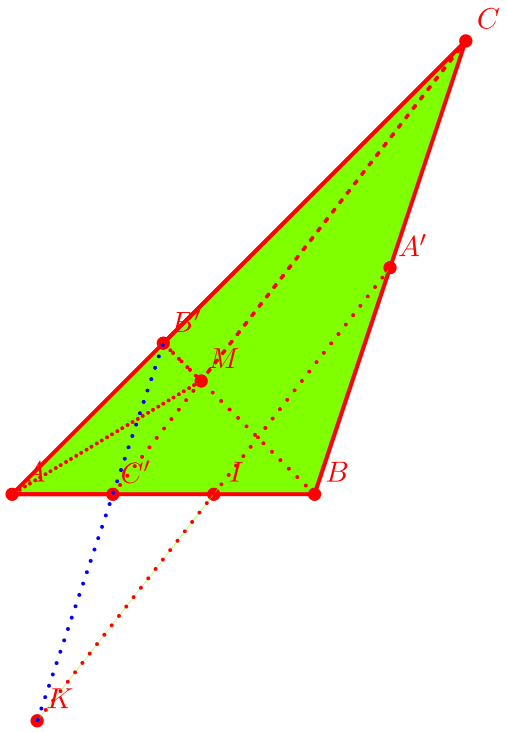
b. *Montrer que P est le milieu de$[GG'.]$*



Exercice 17. *Soit M un point distinct de A, B et C tel que les droites $(AM), (BM)$ et (CM) rencontrent respectivement $(CB), (AC)$ et (AB) en A', B' et C'.*

On note K le symétrique de A' par rapport à (AB) parallèlement à (CC') et I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'K)$. Soit $(a, b, 1-a-b)$ les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C).

1. *Calculer les coordonnées barycentriques de A', B' et C' puis celles de I et K.*
2. *Que peut-on dire de K, B' et C' ?*



Références

[Audin M.] Géométrie, Collection enseignement sup.

Table des matières