Les nombres réels

El Hadji Cheikh Mbacké DIOP, IREMPT
El Hadji Malick Dia, FASTEF
Université Cheikh Anta Diop de Dakar

1 Introduction

Dès les premiers pas à l'école, on fait des calculs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la loi $+$, appelée addition, et de la loi $\times$, appelée multiplication. Le triple $(\mathbb{N}, +, \times)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tous $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, $n + m = m + n$;
2. pour tous $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(n + m) + p = m + (n + p)$;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 + n = n$;
4. pour tous $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, $n \times m = m \times n$
5. pour tous $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (m \times n) \times p = m \times (n \times p)$;
6. pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \times n = n$;
7. pour tous $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $m \times (n + p) = m \times n + m \times p$.

La proriétés (1) signifie que l'addition est commutative, (2) signifie qu'elle est associative, (3) exprime qu'elle a un élément neutre, qui est 0 ; la propriété (4) signifie que la multiplication est commutative, (5) signifie qu'elle est associative, (6) signifie qu'elle a pour élément neutre 1 et (7) exprime que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On se rend compte assez vite qu'on ne peut pas résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $3 + n = 2$. Ceci a motivé l'extension de $\mathbb{N}$ à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. La mutiplication et l'addition dans $\mathbb{Z}$ sont des lois associatives, commutatives , possèdent chacune un élément neutre ; en plus de la distributivité de la mulplication par rapport à l'addition, l'addition satisfait la propriété suivante : pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, il existe un élément $(-p)$ de $\mathbb{Z}$ tel que $p + (-p) = 0$.

Ainsi l'équation $3 + n = 2$ a pour solution le nombre entier relatif $n = 2 + (-3)$.

Déjà à l'école élémentaire, on sort de l'ensemble $\mathbb{N}$ en utilisant les fractions pour résoudre les problèmes de partage. Par exemple l'équation $2n = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels a été introduit pour surmonter cette difficulté.

2 Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Considérons l'ensemble

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star\}$$

des nombres rationnels. On munit $\mathbb{Q}$ des lois de compositions $+$(l'addition) et .(la multiplication).

Le triple $(\mathbb{Q}, +, .)$ est un **corps commutatif archimédien** c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tous x, y et z de $\mathbb{Q}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. pour tous x et y de $\mathbb{Q}$, $x + y = y + x$;
3. $0 + x = x$, pour tout x de $\mathbb{Q}$;
4. pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $-x \in \mathbb{Q}$ tel que $x + (-x) = 0$
5. pour tous x et y de $\mathbb{Q}$, $x(yz) = (xy)z$;
6. pour tous x et y de $\mathbb{Q}$, $xy = yx$
7. $1 \neq 0$ et $1x = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$;
8. pour tout $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, il existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tel que $xx^{-1} = 1$;
9. $x(y + z) = xy + xz$.
10. $\mathbb{Q}$ est archimédien.

La relation d'ordre total noté $\leq$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$
2. $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

Définition 2.1. *Une partie non vide A de $\mathbb{Q}$ est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout x de A, $x \leq M$. Si A est majoré, un rationnel M tel que $x \leq M$ pour tout élément x de A est appelé majorant de A.*

Par exemple, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 \leq 2\}$ est majoré.

Définition 2.2. *On dit qu'une partie A non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ admet un plus grand élément s'il existe un majorant de A qui appartient à A.*

Par exemple 5 est le plus grand élément de l'ensemble $A = \{m \in \mathbb{N} : m^2 \leq 28\}$.

Exercice 1. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$ admet-il un plus grand élément ?

Définition 2.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$. S'il existe $m \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout x de A, $m \leq x$, on dit que A est minorée et que m est un minorant de A.*

Exercice 2. Montrer l'ensemble A des rationnels x tels que $x^3 + x \geq 0$ est minoré.

Définition 2.4. *On dit qu'une partie A non vide et minorée de $\mathbb{Q}$ admet un plus petit élément s'il existe un minorant de A qui appartient à A.*

Exercice 3. L'ensemble $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$ admet-il un plus petit élément ?

L'ensemble des nombres entiers impairs n'est ni majoré ni minoré.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{Q}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
Par exemple l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} : x^2 + 3x \leq 0\}$ est borné.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$:

- si A est majorée, l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A est non vide et minorée.
- si A est minorée, l'ensemble $\mathcal{J}$ des minorants de A est non vide et majorée.

Définition 2.5. *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$. Si l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A possède un plus petit élément S, on dira que S est la borne supérieure de A et on posera* $\sup A = S$.

Caractérisation de la borne supérieure.

Théorème 2.1. *Une partie non vide majorée A de $\mathbb{Q}$ possède une borne supérieure si et seulement s'il existe un nombre rationnel S qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout x de A, $x \leq S$;*
2. *pour tout rationnel $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S < a + r$.*

Et S est alors la borne supérieure de A.

Exercice 4. Prouver que 5 est la borne supérieure de l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$.

Exercice 5. Prouver que l'ensemble $B = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$ possède une borne supérieure que l'on déterminera.

Définition 2.6. *Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{Q}$. Si l'ensemble $\mathcal{J}$ des minorants de A possède un plus grand élément m, on dira que m est la borne inférieure de A et on posera* $\inf A = m$.

Caractérisation de la borne inférieure.

Théorème 2.2. *Une partie non vide minorée A de $\mathbb{Q}$ possède une borne inférieure si et seulement s'il existe un nombre rationnel m qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout x de A, $m \leq x$;*
2. *pour tout rationnel $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a < m + r$.*

Et m est alors la borne inférieure de A.

3 Les carences du corps $\mathbb{Q}$

3.1 L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

En effet supposons qu'il existe deux nombres entiers p et q sans facteur commun tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. On a alors $p^2 = 2q^2$; il existe donc un entier k tel que $p = 2k$. On en déduit que $q^2 = 2k^2$. Par conséquent l'entier q est pair. Ainsi 2 est un facteur commun à p et q, ce qui contredit l'hypothèse.

3.2 Il existe des parties majorées de $\mathbb{Q}$ qui n'ont pas de borne supérieure

L'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q}^+ : x^2 \leq 2\}$ est majoré mais n'admet pas de borne supérieure.

Supposons que l'ensemble A admette une borne supérieure $s \in Q$.

Si $s^2 < 2$, posons $h = min(\frac{2-s^2}{2s+1}, 1)$. On vérifie facilement que $(s+h)^2 \leq 2$, d'où $s + h \in A$. Comme $h > 0$, s n'est pas un majorant de A.

Si $s^2 > 2$, posons $t = min(\frac{s^2-1}{2s-1}, 1)$. On vérifie facilement que $(s-t)^2 \geq 2$. Comme $t > 0$, s n'est pas le plus petit majorant de A, c'est-à-dire n'est pas la borne supérieure de A.

Par conséquent, si A possédait une borne supérieure $s \in Q$, on aurait $s^2 = 2$, ce qui est impossible.

3.3 Il existe des suites d'intervalles emboîtés dont l'intersection est vide

Considérons les suites de nombres rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!}$$

et

$$b_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : c'est évident.
La suite b_n est strictement décroissante : $b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{(n+1)(n+1)!} < 0$.

On remarque que $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. On notera $[a_n, b_n]$ l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} : a_n \leq r \leq b_n\}$. Les intervalles $[a_n, b_n]$ vérifient la propriété suivante : $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$; on dit qu'ils sont emboités. Pourtant leur intersection est vide.

En effet supposons qu'il existe $\ell = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\ell \in [a_n, b_n]$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_q < \frac{p}{q} < b_q$, c'est-à-dire :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!} + \frac{1}{q.q!}.$$

Les nombres $qq!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!})$, $q!p$ et $qq!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!}) + 1$ sont des entiers et on a :

$$qq!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!}) < q!p < qq!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{q!}) + 1,$$

ce qui est impossible.
Conclusion : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset$.

3.4 Il existe dans $\mathbb{Q}$ des suites de Cauchy non convergentes

Considérons la suite $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la sous-section 3.3. En remarquant que, si $p \geq 1$, $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$, on montre que si n et m sont des entiers tels que $m > n$, alors :

$$0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}, \text{ d'où } 0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^n} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Soit un rationnel $r > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe un entier N tel que $\frac{1}{N} < r$. Pour tous $n \geq N+1, m \geq N+1$, on a : $0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{N} \leq r$. Comme on peut choisir le rationnel r aussi petit que l'on veut, les termes de la suite (a_n) s'empilent lorsque l'indice n devient de plus en plus grand : on dit que la suite (a_n) est de **Cauchy**. On s'attend donc à ce que la suite (a_n) ait une limite dans $\mathbb{Q}$, c'est-a-dire qu'il existe un un nombre rationnel ℓ tel que : pour tout rationnel $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \epsilon$. Il n'en est pas malheureusement ainsi. Pour s'en convaincre, faire l'exercice suivant :

Exercice 6. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la sous-section 3.3, montrer que la suite (a_n) n'a pas de limite.

L'existence de parties majorées de $\mathbb{Q}$ sans borne supérieure, d'intervalles emboîtés de $\mathbb{Q}$ dont l'intersection est vide, et de suites de Cauchy non convergentes sont les symptômes d'une seule et même pathologie de $\mathbb{Q}$: son incomplétude. C'est ce défaut qui motive l'extension de $\mathbb{Q}$ au corps des nombres réels.

4 Axiomes des nombres réels

Définition 4.1. *Le corps des nombres réels est un ensemble noté $\mathbb{R}$, muni de deux lois de composition interne*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} . : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$$

*et d'une relation d'ordre $\leq$ qui satisfont les axiomes **(A1), (A2), (A3)** et **(A4)** suivants :*

(A1) *: $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :*

A11. La loi + est associative : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}, x+(y+z)=(x+y)+z$

A12. La loi + est commutative : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}, x+y=y+x$

A13. La loi + admet un élément neutre : $\exists\ 0_{\mathbb{R}}\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, x+0_{\mathbb{R}}=x$.

A14. $\forall x\in\mathbb{R}$, il existe un élément $(-x)$ de $\mathbb{R}$ tel que $x+(-x)=0_{\mathbb{R}}$

A15. La loi . est associative : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}, x.(y.z)=(x.y)z$

A16. La loi . est commutative : $\forall y\in\mathbb{R}, x.y=y.x$

A17. La loi . admet un élément neutre $1_{\mathbb{R}}$ différent de 0 : $\forall x\in\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}.x=x$.

A18. $\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0_{\mathbb{R}}$, il existe un élément noté x^{-1} de $\mathbb{R}$ tel que $x.x^{-1}=1_{\mathbb{R}}$.

A19. La loi . est distributive par rapport à + : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}, x.(y+z)=x.y+x.z$.

(A2) *: $(\mathbb{R},+,.,\leq)$ est un corps totalement ordonné, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :*

A21. si $x\leq y$ et $y\leq x$, alors $x=y$

A22. si $x\leq y$ et $y\leq z$, alors $x\leq z$

A23. La relation $\leq$ est une relation d'ordre total : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}$, on a : $x\leq y$ ou $y\leq x$

A24. Si $x\leq y$, alors on : $x+z\leq y+z, \forall z\in\mathbb{R}$

A25. Si $0_{\mathbb{R}}\leq x$ et $0_{\mathbb{R}}\leq y$, alors $0_{\mathbb{R}}\leq xy$.

On écrira $x<y$ si $x\leq y$ et $x\neq y$.
Si n est un entier naturel non nul et $x\in R$, on posera : $nx=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{nfois}$.

(A3) *: $(\mathbb{R},+,.,\leq)$ est un corps archimédien, c'es-à-dire vérifie la propriété suivante : si x et y sont des éléments de $\mathbb{R}$ tels que $0_{\mathbb{R}}<x$ et $0_{\mathbb{R}}\leq y$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $y\leq nx$.*

On dit qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout x de A, $x\leq M$. On dit qu'une partie non vide majorée A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure s'il existe $S\in\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. *$\forall x\in A, x\leq S$;*
2. *$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$ tel que $0_{\mathbb{R}}<\varepsilon$, il existe $a\in A$ tel que $s<a+\varepsilon$.*

Le nombre réel S est alors appelé borne supérieure de A.

(A4) *: toute partie non vide A majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Remarques. Les propriétés suivantes sont vérifiées

1) Si a est élément de $\mathbb{R}$ tel que $a+x=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors $a=0_{\mathbb{R}}$. En effet on a : $a+0_{\mathbb{R}}=a$ d'après A13. Puisque $a+0_{\mathbb{R}}$ est aussi égal à $0_{\mathbb{R}}$, on a : $a=0_{\mathbb{R}}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $0_{\mathbb{R}}.x = 0_{\mathbb{R}}$. En effet comme $x = x + 0_{\mathbb{R}}$, on a : $x.x = (x + 0_{\mathbb{R}}).x$. Puisque $(x + 0_{\mathbb{R}}).x = x.x + 0_{\mathbb{R}}.x$, on a $x.x = xx + 0_{\mathbb{R}}.x$, $-(x.x) + xx) = 0_{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}.x = 0_{\mathbb{R}}.x$, on en déduit que $0_{\mathbb{R}}.x = 0_{\mathbb{R}}$.

3) Si a est élément de $\mathbb{R}$ tel que $a.x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $a = 1_{\mathbb{R}}$.

4) Pour tout réel $x \neq 0_{\mathbb{R}}$, il existe un unique $y \neq$ tel que $xy = 1_{\mathbb{R}}$.

5) Pour tous réels x et y, $(-x)y = -(xy$, $(-x)(-y) = xy$.

5 Propriétés de la relation d'ordre $\leq$

On rappelle que la notation $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$.

Proposition 5.1. *Soient x et y deux nombres réels. Une et une seule des relations suivantes est vraie :*
- $x < y$;
- $x = y$;
- $y < x$.

Démonstration. D'après A21, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$. En outre, d'après A22, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Par suite si $x \neq y$, une et une seule des relations "$x \leq y$" ou "$y \leq x$" est vraie.

Proposition 5.2. *Soient x et y deux nombres réels.*

1. *si $x \leq y$ et $y < z$, alors $x < z$.*
2. *si $x < z$ et $y \leq z$, alors $x < z$.*

Démonstration. Puisque $y < z$, on a : $x \leq z$, d'après l'axiome **(A2)**. Si x était égal à z, on aurait $x \leq y$ et $y < x$, ce qui est absurde.

Exercice 7. . Prouver la deuxième assertion de la proposition 5.2.

Proposition 5.3. *Soient x, y et z trois éléments de $\mathbb{R}$.*
i) Les assertions "$x \leq y$" et " $x + z \leq y + z$" sont équivalentes.
ii) Les assertions " $x < y$" et "$x + z < y + z$" sont équivalentes.

Démonstration. D'après A24, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.

Réciproquement supposons $x + z \leq y + z$. D'après A24, $(x + z) + (-z) \leq (y + z) + (-z)$. Les relations $(x + z) + (-z) = x + (z + (-z)) = x + 0_{\mathbb{R}} = x$ et $(y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0_{\mathbb{R}} = y$ impliquent alors l'inégalité : $x \leq y$.

Supposons $x < y$, c'est-à-dire $x \leq y$ et $x \neq y$. On a alors $x + z \leq y + z$, d'après i). Maintenant si $x + z$ était égal à $y + z$, on aurait $(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z)$. L'associativité de la loi + implique alors l'égalité $x = y$, d'où la contradiction. Ainsi on a : $x + z \leq y + z$ et $x + z \neq y + z$, c'est-à-dire $x + z < y + z$.

Réciproquement supposons $x + z < y + z$, c'est-à-dire $x + z \leq y + z$ et $x + z \neq y + z$. On alors d'après i), $(x + z) + (-z) \leq (y + z) + (-z)$. Comme $(x + z) + (-z) = x$ et $(y + z) + (-z) = y$, on en déduit que $x \leq y$. Si x était égal à y, on aurait $x + z = y + z$, ce qui contredirait l'hypothèse. Par suite, $x \neq z$. On a donc prouvé que $x \neq y$ et $x \leq y$, c'est-à-dire $x < y$.

Proposition 5.4. *Soient x et y deux nombres réels.*
i) Les relations " $x \leq y$", " $0_{\mathbb{R}} \leq y - x$" " $x - y \leq 0_{\mathbb{R}}$" et " $-y \leq -x$" sont équivalentes.

ii) Les relations " $x < y$", "$0_{\mathbb{R}} < y - x$", " $x - y < 0_{\mathbb{R}}$" et " $-y < -x$" sont équivalentes.

Remarque. Si $0_{\mathbb{R}} \leq x$, $-x \leq 0_{\mathbb{R}}$.

Définition 5.1. *Les réels x tels que $0_{\mathbb{R}} \leq x$ (respectivement $0_{\mathbb{R}} < x$) sont dits positifs (respectivement strictement positifs).*

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$. L'ensemble des réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^\star$.

Proposition 5.5. *Si $0_{\mathbb{R}} \leq z$, la relation $x \leq y$ implique $xz \leq yz$.*

Démonstration. En effet si $x \leq y$, alors $0_{\mathbb{R}} \leq y - x$, et d'après l'axiome (II) (5), $0_{\mathbb{R}} \leq z(y-x)$. La distributivité de la multiplication par rapport à la loi $+$ entraîne que $0_{\mathbb{R}} \leq zy - zx$, ce qui signifie d'après la proposition 5.4, que $zx \leq zy$.

Proposition 5.6. *Soient x et y deux nombres réels.*

1. *si $x \leq 0_{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}} \leq y$, alors $xy \leq 0_{\mathbb{R}}$;*
2. *si $x \leq 0_{\mathbb{R}}$ et $y \leq 0_{\mathbb{R}}$, alors $0_{\mathbb{R}} \leq xy$.*
3. *$0_{\mathbb{R}} \leq x^2$; si $x \neq 0_{\mathbb{R}}$, alors $0_{\mathbb{R}} < x^2$.*

Démonstration. (1) Comme $x \leq 0_{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}} \leq y$, d'après la proposition 5.5, $xy \leq 0_{\mathbb{R}}y$, d'où $xy \leq 0_{\mathbb{R}}$.

(2) Puisque $x \leq 0_{\mathbb{R}}$ et$y \leq 0_{\mathbb{R}}$, on a : $0_{\mathbb{R}} \leq -x$ et $0_{\mathbb{R}} \leq -y$. A25 implique alors : $0_{\mathbb{R}} \leq (-x)(-y)$. On en déduit le résultat car $(-x)(-y) = xy$.
Remarque. De la proposition 5.6 et de l'axiome (I) (7), on déduit : $0_{\mathbb{R}} < 1 = 1.1$.

Proposition 5.7. *Soient x et y deux nombres réels.*

1. *si $0_{\mathbb{R}} < x$, alors $0_{\mathbb{R}} < x^{-1}$;*
2. *si $0_{\mathbb{R}} < z$, les relations "$x \leq y$" et "$zx \leq zy$" sont équivalentes ;*
3. *si $0_{\mathbb{R}} < z$, les relations "$x < y$" et "$zx < zy$" sont équivalentes*
4. *les relations "$0_{\mathbb{R}} < x < y$" et "$0_{\mathbb{R}} < y^{-1} < x^{-1}$" sont équivalentes ;*
5. *les relations "$0_{\mathbb{R}} < x < y$" et "$0_{\mathbb{R}} < x^n < y^n$ pour tout entier $n > 0$" sont équivalentes.*

Démonstration.
(1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. On sait que $x^{-1} \neq 0_{\mathbb{R}}$. Supposons $x^{-1} \leq 0_{\mathbb{R}}$. Puisque $0_{\mathbb{R}} < x$, on a alors, d'après la proposition 5.5, $xx^{-1} \leq x.0_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $1_{\mathbb{R}} \leq 0_{\mathbb{R}}$, ce qui est impossible. Par suite on a : $0_{\mathbb{R}} \leq x^{-1}$ et $x^{-1} \neq 0_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $0_{\mathbb{R}} < x^{-1}$.

(2) Soit $z \in \mathbb{R}_+^\star$. D'après (1), $0_{\mathbb{R}} < z^{-1}$. Si $zx \leq zy$, la proposition 5.5 implique : $z^{-1}(zx) \leq z^{-1}(zy)$. L'associativité de la loi . et l'égalité $z^{-1}z = 1_{\mathbb{R}}$ impliquent : $x \leq y$.

On sait ausi, d'après la proposition 5.5, que si $x \leq y$, alors $zx \leq zy$.

(3) On voit, en utilisant (2), qu'il suffit de démonter que les relations "$x \neq y$" et "$zx \neq zy$" sont équivalentes.

(4) Supposons $0_{\mathbb{R}} < x < y$. Puisque $0_{\mathbb{R}} < x^{-1}$, (3) implique : $x^{-1}x < x^{-1}y$, c'est-à-dire $1_{\mathbb{R}} < x^{-1}y$. Puisque $0_{\mathbb{R}} < x^{-1}$, (3) implique : $1_{\mathbb{R}}.y^{-1} < x^{-1}yy^{-1}$, d'où $0_{\mathbb{R}} < y^{-1} < x^{-1}$.

En appliquant la démonstration précédente à y^{-1} et x^{-1}, on montre que, si $0_{\mathbb{R}} < y^{-1} < x^{-1}$, alors $0_{\mathbb{R}} < x < y$.

On démontre facilement (5) en utilisant un raisonnement par récurrence.

Proposition 5.8. *Soient x et y deux nombres réels.*
i) Si $0_{\mathbb{R}} \leq x$ et $0_{\mathbb{R}} \leq y$, alors $0_{\mathbb{R}} \leq x+y$.
ii) Si $0_{\mathbb{R}} < x$ et $0_{\mathbb{R}} \leq y$, alors $0_{\mathbb{R}} < x+y$.

Démonstration.
i) Puisque $0_{\mathbb{R}} \leq x$, la proposition 5.3 implique $0_{\mathbb{R}} + y \leq x + y$, c'est-à-dire $y \leq x+y$. Maintenant comme $0_{\mathbb{R}} \leq y$ et $y \leq x+y$, on a, d'après A22 : $0_{\mathbb{R}} \leq x+y$.
ii) Supposons par exemple $0_{\mathbb{R}} < y$. On a montré dans la preuve de i) l'inégalité : $y \leq x+y$; comme $0_{\mathbb{R}} < y$, la deuxième partie de la proposition 5.2 entraîne : $0_{\mathbb{R}} < x+y$.

Proposition 5.9. *Soient a et b deux réels. L'inégalité $a \leq b$ est vrai si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$.*

Exercice 8. Prouver les affirmations suivantes :
1) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels positifs, alors $0_{\mathbb{R}} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Si de plus il existe un indice i_0 tel que $0_{\mathbb{R}} < x_{i_0}$, alors $0_{\mathbb{R}} < x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. En particulier si $0_{\mathbb{R}} \leq x$, alors $0_{\mathbb{R}} \leq nx$ pour tout entier narurel n. Si $0_{\mathbb{R}} < x$, alors $0_{\mathbb{R}} < nx$ pour tout entier naturel $n \neq 0_{\mathbb{R}}$.

2) Soit (x_i) et (y_i) deux familles de n éléments $(1 \leq i \leq n)$ telles que $x_i \leq y_i$, pour tout i. Alors $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. S'il existe un indice i_0 tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 5.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est le nombre réel*

$$|x| = \begin{cases} x & si \;\; 0_{\mathbb{R}} \leq x \\ -x & si \;\; x \leq 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Remarque 5.1. *1. Pour tout nombre réel x, $|x| = |-x|$.*

2. $|x| = 0_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}}$.

Proposition 5.10. *Soit un réel a tel que $0_{\mathbb{R}} \leq 0$.*

1. *Les relations "$|x| \leq a$" et "$-a \leq x \leq a$" sont équivalentes.*
2. *Si $0 < a$, alors les relations "$|x| < a$" et "$-a < x < a$" sont équivalentes.*

Proposition 5.11. *Soient x et y deux nombres réels. Alors :*

1. *$|x+y| \leq |x| + |y|$;*
2. *$||x| - |y|| \leq |x-y|$.*

Exercice 9. Démontrer les propositions 5.10 et 5.11.

6 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On va montrer dans cette section que le corps $\mathbb{R}$ est une extension du corps $\mathbb{Q}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
• Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, le nombre réel nx a été défini comme l'élément $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n fois}$;

• Si $n = 0$, on pose $nx = 0_{\mathbb{R}}$;
• Si $n < 0$, on pose $nx = (-n)(-x)$.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} j: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & n1_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Proposition 6.1. *L'application j est injective ; de plus elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$j(n+m) = j(n) + j(m)$;*
2. *$j(nm) = j(m).j(n)$;*
3. *si $n \leq m$, $j(n) \leq j(n)$.*

On peut donc voir $\mathbb{Z}$ comme une partie de $\mathbb{R}$ en identifiant l'entier n à l'élément $n1_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$. Désormais on écrira n à la place de $n1_{\mathbb{R}}$.

Remarque 6.1. *L'assertion* (3) *de la proposition 6.1 est encore équivalente à :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0_{\mathbb{R}} \leq j(n).$$

Soient $p \in \mathbb{Z}, m \in Z, q \in \mathbb{N}^\star, n \in \mathbb{N}^\star$ des entiers tels que $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$: $pn = qm$. Les égalités $j(pn) = j(p)j(n)$ et $j(qm) = j(q)j(m)$ entraînent $j(p)j(n) = j(q)j(m)$; il en résulte que $j(p)\big(j(q)\big)^{-1} = j(m)\big(j(n)\big)^{-1}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \iota: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & \frac{p}{q} & \to & j(p)\big(j(q)\big)^{-1} \end{array}$$

est donc bien définie.

Théorème 6.1. *L'application $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est injective et est un homomorphisme de corps compatible avec les relations d'ordre $\leq$ définies dans $\mathbb{Q}$ et et $\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\iota(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}) = \iota(\frac{p}{q}) + \iota(\frac{p'}{q'})$;*
2. *$\iota(\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}) = \iota(\frac{p}{q}).\iota(\frac{p'}{q'})$;*
3. *si $\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}$, $\iota(\frac{p}{q}) \leq \iota(\frac{p'}{q'})$.*

Démonstration. Montrons que ι est injective. Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{m}{n}$ deux éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $\iota(\dfrac{p}{q}) = \iota(\dfrac{m}{n})$. De l'égalité $j(p)\big(j(q)\big)^{-1} = j(m)\big(j(n)\big)^{-1}$, on déduit $j(p)j(n) = j(m)j(q)$. Puisque $j(p)j(n) = j(pn)$ et $j(m)j(q) = j(mq)$, on a : $j(pn) = j(mq)$. Comme j est injective, on a $pn = mq$, d'où $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ deux éléments de $\mathbb{Q}$. On a les relations

$$\begin{array}{rcl} \iota\big(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\big) & = & \iota\big(\frac{pq'+qp'}{qq'}\big) \\ & = & j(pq'+qp')\big(j(qq')\big)^{-1} \\ & = & \big(j(pq') + j(qp')\big)\big(j(q)j(q')\big)^{-1} \\ & = & \big(j(pq') + j(qp')\big)\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} \\ & = & j(pq')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} + j(qp')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} \\ & = & j(p)j(q')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} + j(q)j(p')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1}. \end{array}$$

Puisque $j(q')\big(j(q')\big)^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$, on a

$$j(p)j(q')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} = j(p)1_{\mathbb{R}}\big(j(q)\big)^{-1} = j(p)\big(j(q)\big)^{-1} = \iota(\frac{p}{q}).$$

On montre de la même manière que

$$j(q)j(p')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} = \iota(\frac{p'}{q'})$$

Finalement, on a : $\iota\big(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\big) = \iota(\frac{p}{q}) + \iota(\frac{p'}{q'})$.

$$\begin{aligned}
\iota\big(\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}\big) &= \iota\big(\frac{pp'}{qq'}\big) \\
&= j(pp')\big(j(qq')\big)^{-1} \\
&= j(p)j(p')\big(j(q)j(q')\big)^{-1} \\
&= j(p)j(p')\big(j(q')\big)^{-1}\big(j(q)\big)^{-1} \\
&= j(p)\big(j(q)\big)^{-1}j(p')\big(j(q')\big)^{-1} \\
&= \Big(\iota(\frac{p}{q})\Big)\Big(\iota(\frac{p'}{q})\Big)
\end{aligned}$$

Prouvons (3). D'après (2), on a : $\iota(\frac{p'}{q'}) - \iota(\frac{p}{q}) = \iota(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q})$, d'où

$$\begin{aligned}
\iota(\frac{p}{q}) - \iota(\frac{p'}{q'}) &= \iota\big(\frac{p'q - pq'}{qq'}\big) \\
&= j(p'q - pq')\big(j(qq')\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq p'q - pq'$ et $0 < qq'$, la remarque 6.1 entraîne : $0_{\mathbb{R}} \leq j(p'q - pq')$, $0_{\mathbb{R}} < j(qq')$. On a alors, d'après la proposition 5.7, $0_{\mathbb{R}} < \big(j(qq')\big)^{-1}$. Les relations $0_{\mathbb{R}} \leq j(p'q - pq')$ et $0_{\mathbb{R}} < \big(j(qq')\big)^{-1}$ impliquent d'après A25 l'inégalité $0_{\mathbb{R}} \leq j(p'q - pq')\big(j(qq')\big)^{-1}$, c'est-à-dire $0_{\mathbb{R}} \leq \iota\big(\frac{p'q - pq'}{qq'}\big)$. Ceci prouve que $0_{\mathbb{R}} \leq \iota(\frac{p'}{q'}) - \iota(\frac{p}{q})$, d'où $\iota(\frac{p}{q}) \leq \iota(\frac{p'}{q'})$.

L'application ι permet d'identifier le rationnel $\frac{p}{q}$ à son image $\iota(\frac{p}{q})$. On peut ainsi voir $\mathbb{Q}$ comme une partie de $\mathbb{R}$: on dira que le réel $\iota(\frac{p}{q})$ est un nombre rationnel et on le notera simplement $\frac{p}{q}$. Les réels $0_{\mathbb{R}}$ et $1_{\mathbb{R}}$ s'identifie respectivement aux éléments 0 et 1 de $\mathbb{Q}$. Dans la suite, l'élément neutre $0_{\mathbb{R}}$ de l'addition dans $\mathbb{R}$ sera noté 0 ; l'élément neutre $1_{\mathbb{R}}$ de la mulplication sera noté 1. De la même manière que l'inverse d'un rationnel $q \neq 0$ était noté $\frac{1}{q}$, l'inverse x^{-1} d'un nombre réel x différent de 0 sera noté $\frac{1}{x}$.

On a montré au début du chapitre que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 \leq 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Mais cet ensemble admet une borne supéreiure dans $\mathbb{R}$, que l'on notera $\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$: on dira que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 10. Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin Q$, alors $a + b$ n'appartient pas $\mathbb{Q}$. En déduire qu'il existe une infinité de nombres irrationnels.

Si a et b sont deux irrationnels, que peut on dire de $a + b$? de ab ?

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| + |3x + 7| = 42$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x^2 - 3x + 2| < 4$.

Exercice 13. Soit x un réel. Prouver qu'il existe un unique élément $E(x)$ de $\mathbb{Z}$ tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On dit que $E(x)$ est la partie entière de x.

Résoudre l'équation $E(3x + 2) = x^2$; résoudre l'équation $E(\frac{1}{x}) = 4x - 3$.

Exercice 14. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. On pose $a = \dfrac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $h = \dfrac{2}{\frac{x+y}{xy}}$.

Les réels a, g et h sont respectivement appelés moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique de x et y.

Ranger par ordre croissant les nombres x, y, g, a et h.

7 Majorant - minorant - borne supérieure - borne inférieure

On rappelle qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A,\ x \leq M. \tag{1}$$

Si A est majoré, tout réel M satisfaisant la condition (1) est appelé majorant de A.

Théorème 7.1. *Si B est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, la borne supérieure de B est alors le plus petit majorant de A.*

Définition 7.1. *Une partie non vide B de $\mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que :*

$$\forall x \in B,\ m \leq x. \tag{2}$$

Si B est minorée, tout nombre réel m vérifiant la condition (2) est appelé minorant de B.

Définition 7.2. *On dit qu'une partie non vide minorée B de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure s'il existe un nombre réel s vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$\forall x \in B$, $s \leq x$;*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in B$ tel que $x_0 < s + \varepsilon$.*

Le nombre réel s est alors appelé borne inférieure de B.

D'après l'axiome (**A4**), toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On a l'analogue de cette propriété pour les parties non vides minorées de $\mathbb{R}$:

Théorème 7.2. *Toute partie non vide minorée B de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Démonstration. Soit B un partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Soit m un minorant de B. La proposition 5.4 entraîne que, pour tout $x \in B$, on a : $-x \leq -m$. L'ensemble $A = \{-x, x \in B\}$ est donc majoré ; par suite A, possède, d'après l'axiome (**A4**), une borne supérieure, qu'on notera S. On va montrer que $-S$ est la borne inférieure de B.

1. Soit $x \in B$, on a : $-x \leq S$. On a alors, d'après la proposition 5.4, $-S \leq -(-x)$, d'où $-S \leq x$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x_0 \in B$ tel $S < -x_0 + \varepsilon$. Il résulte alors de la proposition 5.4 que $-(-x_0 + \varepsilon) < -S$, d'où $x_0 - \varepsilon < -S$; la dernière inégalité implique : $x_0 < -S - \varepsilon$.

On a donc prouvé que $-S$ est la borne inférieure de B.

Définition 7.3. *Si la borne supérieure S d'une partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ appartient à A, on dit que S est le plus grand élément de A.*
Si la borne inférieure s d'une partie non vide et minorée B de $\mathbb{R}$ appartient à B, on dit que s est le plus petit élément de B.

Remarque 7.1. *Une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *n'admet pas toujours un plus grand élément. Par exemple l'ensemble* $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ *est majoré mais n'a pas de plus grand élément.*

Définition 7.4. *On dit qu'une partie non vide* A *de* $\mathbb{R}$ *est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exercice 15.
a) L'ensemble $A = \{\dfrac{mn}{m+n+1}, n \in \mathbb{N}^\star, m \in \mathbb{N}^\star\}$ est-il majoré ? Prouver que A est minoré et déterminer $\inf A$.
b) L'ensemble $B = \{\dfrac{m+n+1}{mn}, n \in \mathbb{N}^\star, m \in \mathbb{N}^\star\}$ est-il majoré ? Si oui, trouver $\sup A$; B à-t-il un plus grand élément ?
c) B est-il minoré. Si oui déterminer $\inf B$. L'ensemble B possède-t-il un plus petit élément ?

Exercice 16. Soit l'ensemble $E = \{\dfrac{(-1)^n.n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la borne supérieure de E et la borne inférieure de E.

Exercice 17. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.
a) Déterminer $\sup A \cup B$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.
b) On pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Déterminer $\sup A + B$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.
c) Si A et B sont majorées, l'ensemble $A.B = \{ab, a \in A, b \in B\}$ est-il majoré ? Si $A.B$ est majorée, donner des exemples où les nombres $\sup A.B$ et $\sup A. \sup B$ sont différents.
d) On suppose que A et B sont bornées et que B est inclus dans $\mathbb{R}_+^\star$. Soit $C = \{\dfrac{a}{b}, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer par des exemples que C n'est en général ni majoré, ni minoré .
2. Si $A \subset \mathbb{R}_+^\star$, montrer que C est majorée si et seulement si $\inf B > 0$ et on a alors : $\sup C = \dfrac{\sup A}{\inf B}$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}_+$ déterminer $\inf C$.

Définition 7.5. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur une partie* I *de* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est majorée si l'ensemble* $F = \{f(x) : x \in I\}$ *de ses valeurs est majorée. On dit qu'elle est minorée si* F *est minorée.*

On dit que f *est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Si f *est majorée, on notera* $\sup f$ *la borne supérieure de* f*. Si elle est minorée, on notera* $\inf f$ *la borne inférieure de* F*.*

Exercice 18. La fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est-elle majorée ?

Exercice 19. Prouver que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+2}{1+|x|}$ est bornée. Déterminer $\sup g$ et $\inf g$.

Définition 7.6. *Si* f *et* g *sont deux fonctions numériques définies sur une partie* I *de* $\mathbb{R}$*, on note* $\sup(f, g)$ *la fonction définie sur* I *par* $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$*. De même, la fonction* $\inf(f, g)$ *est définie sur* I *par* $\inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$*.*

Exercice 20. Prouver que pour tout $x \in [0,2]$, $\dfrac{1}{3}|x-1| \leq |\sqrt{x} - 1| \leq |x-1|$.

Exercice 21. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.
a) Prouver que pour tout $x \in [1,3]$, $|f(x)| \leq 2|x-2|$.
c) Prouver que si a et b sont deux réels distincts, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tous x et y de $]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$.
d) Soient $p \in \mathbb{N}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe un réel $\delta > 0$ et un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, $|f(x) - f(a)| \leq M|x-a|$.

Exercice 22. Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ dans chacun des cas suivants :
a) $f(x) = |x|$ et $g(x) = x^2$;
b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 3$;
c) $f(x) = 2(|x| + 1)$ et $g(x) = 3\sqrt{x^2 + 1}$.

8 La droite achevée $\bar{\mathbb{R}}$

Considérons l'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ obtenu en rajoutant à $\mathbb{R}$ deux nouveaux points que l'on notés $+\infty$ et $-\infty$: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge à $\bar{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre total $\leq$ en décidant que :

i) $-\infty \leq +\infty$,

ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq +\infty$,

iii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq x$.

Remarque 8.1. *Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x \neq +\infty$ et $x \neq -\infty$. La condition ii) est donc équivalente à : $x < +\infty$; de même la condition iii) est équivalente à : $-\infty < x$.*

Définition 8.1. *L'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$, muni de la relation d'ordre $\leq$ (c'est-à-dire le couple $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$), est appelé droite numérique achevée.*

9 Topologie de $\mathbb{R}$

Définition 9.1. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.*

1. *L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$ est appelé intervalle ouvert $]a, b[$.*
2. *L'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.*
3. *L'intervalle semi-ouvert à droite $[a, b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.*
4. *L'intervalle semi-ouvert à gauche $]a, b]$ l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$.*
5. *La longueur de l'intervalle $[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b]$ est le nombre réel positif $b - a$.*

On définit de la même façon les intervalles $]-\infty, a[,]-\infty, a], [a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, +\infty[$.

Définition 9.2. *Soit x_0 un nombre réel. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I \subset V$.*

Exemple 9.1. 1) un intervalle ouvert non vide est un voisinage de chacun de ses points.
2) $[0, 2]$ est un voisinage de 1.
3) $[0, 2] \cup \{-5\}$ est un voisinage de 1.
4) $[0, 2]$ est n'est pas un voisinage de 2.
5) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de 3.

Définition 9.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un point x_0 de $\mathbb{R}$ est adhérent à A si, pour tout voisinage V de x_0, $V \cap A$ est non vide. On appelle adhérence de A ((ou encore cloture de A) l'ensemble $\overline{A}$ des réels adhérents à A.*

Exemple 9.2. 1) Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, tout point de A est adhérent à A.
2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Les points a et b sont adhérents à $]a, b[$. En effet si $]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert qui contient a, posons $c = \min(\alpha, b)$. L'intervalle $]a, c[$ est non vide et est inclus dans $]\alpha, \beta[\cap]a, b[$. Ceci prouve que a est adhérent à $]a, b[$. On montre de la même manière que b est un point adhérent à $]a, b[$.

3) Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$. Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert contenant 0. Puisque $0 < \beta$ et $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un élément m de $\mathbb{N}^\star$ tel que $m\beta \geq 1$. Le point $\frac{1}{m+1}$ appartient à $]\alpha, \beta[\cap A$, d'où $]\alpha, \beta[\cap A$ est non vide. Ainsi 0 est point adhérent à A.

Définition 9.4. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un point de A.*

Théorème 9.1.
i) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On va montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel et un irrationnel.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Puisque $b - a > 0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel q tel que $q(b - a) > 1$.
i) Soit p le plus petit élément de l'ensemble $B = \{n \in \mathbb{N} : n(\dfrac{1}{q}) > a\}$. On a les inégalités : $\dfrac{p-1}{q} \leq a < \dfrac{p}{q}$.
On en déduit : $a < \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b - a)$; d'où $\frac{p}{q} < b$. Ainsi le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifie les relations : $a < \frac{p}{q} < b$, c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

ii) Si $a \notin \mathbb{Q}$, alors $a + \frac{1}{q} \notin \mathbb{Q}$ d'après l'exercice 10 et on a : $a < a + \frac{1}{q} < a + (b - a)$, d'où $a < a + \frac{1}{q} < b$, c'est-à-dire $a + \frac{1}{q}$ appartient à l'intrevalle ouvert $]a, b[$.

Si $a \in Q$, il existe une entier p tel que $p(b-a) > \sqrt{2}$ car $\mathbb{R}$ est archimédien. On a alors : $a < a + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$. Le nombre $a + \frac{\sqrt{2}}{p}$ n'est pas rationnel d'après l'exercice 10, et appartient à l'intervalle $]a, b[$. $\square$

Remarque 9.1. *Le théorème 9.1 implique qu'un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Définition 9.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit qu'un élément x_0 de $\mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A, si pour tout voisinage V de x_0, l'ensemble $(V \setminus \{x_0\}) \cap A$ est non vide.*

Exemple 9.3. 1) Soit l'ensemble $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$; 0 est un point d'accumulation de A.
2) Si $]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide, ses extrêmités a et b sont des points d'accumulation de $]a, b[$.
3) L'ensemble $\mathbb{Z}$ ne possède aucun point d'accumulation.

Remarque 9.2. *Si x_0 est un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}$, il est alors adhérent à A. Cependant un point adhérent à A n'est pas en général un point d'accumulation de A.*

Exercice 23. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x_0 contient une infinité de points de A.

Définition 9.6. *Soit $([a_n, b_n])_{n \in N}$ une famille dénombrable d'intervalle fermés bornés. On dit que les intervalles $[a_n, b_n]$ sont emboîtés si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est inclus dans $[a_n, b_n]$.*

Théorème des segments emboîtés. *Si* $([a_n, b_n])_{n\in N}$ *est une famille dénombrable d'intervalles **fermés bornés** emboîtés, l'intersection* $\bigcap_n [a_n, b_n]$ *est non vide.*

Démonstration. L'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par b_0 ; il possède donc d'après l'axiome **A4** une borne supérieure s. L'ensemble $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par a_0 ; il possède donc d'après le théorème 7.2 une borne inférieure i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \le s \le i \le b_n$. Il en résulte que l'ensemble $\bigcap_n [a_n, b_n]$ contient l'intervalle $[s, i]$, et est donc non vide.

Remarque 9.3. *Si on avait seulement considéré des intervalles* I_n *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $I_{n+1} \subset I_n$*,l'intersection* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *pourrait être vide. Pour s'en convaincre, faire l'exercice suivant.*

Exercice 24. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, I_n =]0, \frac{1}{n}[$ et $J_n = [n, +\infty[$. Trouver l'ensemble A des réels x tels que $x \in I_n$, pour tout $n \ge 1$. Trouver l'ensemble B des réels x tels que $x \in J_n$, pour tout $n \ge 1$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *Toute partie infinie et bornée* B *de* $\mathbb{R}$ *admet un point d'accumulation.*

Démonstration. Puisque B est borné, il existe un intervalle $I_1 = [m, M]$ de $\mathbb{R}$ qui le contient. Considérons les intervalles $I'_1 = [m, \frac{m+M}{2}]$ et $I"_1 = [\frac{m+M}{2}, M]$. Comme B est infini, l'un des intervalles I'_1 ou $I"_1$ contient une infinité de points de B. Si I'_1 contient un nombre infini de points de B, on pose $I_2 = I'_1$; dans le cas contraire, on pose $I_2 = I"_1$.
Remarquons que si ℓ est la la longueur de I_1, celle de I_2 est $\frac{\ell}{2}$.

De la même manière que pour I_1, on peut découper I_2 en deux intervalles fermés I'_2 et $I"_2$ de même longueur dont l'un au moins contient une infinité de points de B. On posera $I_3 = I'_2$ si I'_2 contient une infinité de points de B , sinon on pose $I_3 = I"_2$. Remarquons que $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ et que la longueur de I_3 est égale à la moitié de celle de I_2, c'est-à-dire $\frac{\ell}{2^2}$.

Par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles fermés emboîtés (I_n) de longueur $\frac{\ell}{2^{n-1}}$. D'après le théorème des segments emboîtés, il existe un réel a qui appartient à chacun des intervalles I_n. Soit J un intervalle ouvert contenant a ; il existe un réel $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[$ est inclus dans J. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier n tel que $\ell < r2^{n-1}$. Si x est un point de l'intervalle I_n, alors $|x - a| < \frac{\ell}{2^{n-1}} < r$, et appartient donc à $]a - r, a + r[$. Ainsi on a : $I_n \subset]a - r, a + r[\subset J$. Comme I_n contient une infinité de points de B, il en est de même de J.

On a donc prouvé que tout intervalle ouvert contenant a contient une infinité de points de B. Par suite a est un point d'accumulation de B. □

Exercice 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots \dfrac{1}{n!}$. Prouver que l'ensemble $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ possède un point d'accumulation.

Exercice 26. Soit $B = \{\dfrac{x}{|x| + 1}, x \in \mathbb{R}\}$. Prouver que 1 et -1 sont des points d'accumulation de B. Déterminer l'adhérence $\overline{B}$ de B.