Université Cheikh Anta Diop de Dakar / Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et Informatique
Travaux dirigés d'analyse de L1MPI
Année universitaire 2010-2011

1. **Série No 1**

Exercice 1.1. .

(1) *Dans* $\mathbb{Q}$, *montrer que* $a \leq b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow a \leq b$.

(2) *Montrer que* $\sqrt{7}$ *n'est pas un rationnel*

Indication: utiliser le fait que si 7 divise x^2, (où x est un entier) alors 7 divise x: [remarque: on peut montrer ce résultat (mais ce n'est pas demandé) en raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Bezout vu en terminal en arithmétique].

(3) *Déterminer la borne supérieure de* $F = \{r \in \mathbb{Q}/r < 7\}$.

(4) *Montrer que* $G = \{r \in \mathbb{Q}_+/r^2 < 7\} = \{r \in \mathbb{Q}_+/r^2 \leq 7\}$ *puis que* G *n'a pas de borne sup dans* $\mathbb{Q}$.

(5) *Montrer que* $H_1 = \{r \in \mathbb{Q}_+/r^3 < 8\}$ *et* $H_2 = \{r \in \mathbb{Q}_+/r^3 \leq 8\}$ *ont des bornes supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.2. *Calculer les sommes et produits suivants:*

(1) $S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

(2) $S_2 = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} (i + j)$

(3) $S_3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$

Exercice 1.3. (1) *Montrer que :*

(a) $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ E(x + y) - E(x) - E(y) = 0$ *où* 1

(b) $\forall\ x \in \mathbb{Z},\ E(x) + E(-x) = 0$.

(c) $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ E(x) + E(-x) = -1$.

(d) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.

(2) *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $r_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$. *Montrer que* $0 \leq x - r^n < \frac{1}{10n}$. *On obtient ainsi une approximation de* x *à* 10^{-n} *près par défaut par le rationnel* r^n .

Exercice 1.4. .

(1) *Montrer que la relation "divise" dans* $\mathbb{N}^*$ *est une relation d'ordre partiel.*

(2) *Soit* E *et* F *deux ensembles non vides et* $f : E \to F$ *une application . On définit sur* E *la relation* $a\mathbf{R}b$ *si et seulement si* $f(a) = f(b)$. *Montrer que* $\mathbf{R}$ *est une relation d'équivalence sur* E.

(3) *Déterminer dans* $\mathbb{Q}$: $A = \cap_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$, $B = \cup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$ *et* $C = \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n + 1]$

(4) *Soit* n *un entier* $(n \geq 2)$ *on définit sur* $\mathbb{Z}$ *la relation* $x\sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x - y = kn$. *Montrer que* σ *est une relation d'équivalence.*

Exercice 1.5. *Les calculs sont effectués dans* $\mathbb{R}$.

(1) *Démontrer les formules suivantes (par plusieures méthodes):* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(2) *Déterminer en discutant fonction de* $q \in \mathbb{R}$, *la somme* $\Sigma = q^l + q^{l+1} + ... + q^n$ *avec* $l < n$ *dans* $\mathbb{N}$.

(3) *Démontrer la formule du binôme de Newton.*

(4) *Simplier:* $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ *et* $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

(5) *Montrer que,* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$

Exercice 1.6. *Soient* A, B *et* C *trois ensembles non vides de nombres réels.*

(1) *On suppose que* A *est majoré et* B *est inclus dans* A. *Montrer que* B *est majoré et* $\sup B \leq \sup A$

(2) *On suppose que* A *et* C *sont bornés; montrer que* $A \cap C$ *est borné et que:*

$$\sup(\inf A,\ \inf C) \leq \inf A \cap C \leq \sup A \cap C \leq \inf(\sup A,\ \sup C).$$

Donner un exemple pour montrer que les inégalités précédentes peuvent être stricts.

(3) *On suppose que A et B sont bornés; exprimer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$, après avoir montré que ces bornes* sup *existent.*

Exercice 1.7. *Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $ab + bc + ca = 1$. Montrer que $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$.*

Exercice 1.8. *Montrer que pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, ...x_n$ avec $n \geq 3$, tels que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ on a l'inégalité : $\frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} \geq x_1 + x_2 + ... + x_n$.*

Indication: On pourra démontrer et utiliser le fait que que si $0 \leq x \leq y$ et si $0 < a \leq 1$, alors on a : $x + y \leq ax + \frac{y}{a}$.

Exercice 1.9. *Montrer qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant simultanèment les 2 conditions suivantes:*

(1) *$f(1) = 1$ et $|f|$ est majoré;*

(2) *pour tout réel x non nul : $f\big(x + \frac{1}{x^2}\big) = f(x) + f\big(\frac{1}{x}\big)^2$.*

Indication: on pourra montrer que si f vérifie (1) et (2) alors f ne vérifie pas (3)!

a) Trouver x_0 tel que $f(x_0) \geq 2$

b) Montrer que s'il existe $t > 1$ tel que $f(t) \geq 2$ alors il existe $t' > 1$ te que $f(t') \geq f(t) + 1$

c) En déduire l'existence d'une suite $(x_n)_n$ telle que $f(x_n) \geq n + 2$ puis conclure!

Exercice 1.10. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

(1) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A$, où A prend les valeurs $A = \sqrt{2}$, $A = 2$ et $A = 1$.*

(2) *Monter que dans $\mathbb{R}$ qu'il existe un solution positive unique de l'équation , $x^7 = 3$ (adapter la preuve complete du cours).*

Exercice 1.11. .

(1) *Montrer que la relation "divise" dans $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre partiel.*

(2) *Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application . On définit sur E la relation $a\mathbf{R}b$ si et seulement si $f(a) = f(b)$. Montrer que $\mathbf{R}$ est une relation d'équivalence sur E.*

(3) *Déterminer dans $\mathbb{Q}$: $A = \cap_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$, $B = \cup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$ et $C = \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1]$*

(4) *Soit n un entier ($n \geq 2$) on définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x \sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$. Montrer que σ est une relation d'équivalence.*

Exercice 1.12. (1) *Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

(2) *En déduire que l'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$*

(3) *Soient S et T deux ensembles non vides de nombres réels. On définit: $S + T = \{s + t / s \in S; t \in T\}$ et $S - T = \{s - t / s \in S; t \in T\}$*

On suppose que S et T sont bornés. Montrer que $\sup(S + T) = \sup(S) + \sup(T)$ et que $\inf(S - T) = \inf(S) - \sup(T)$..

Exercice 1.13. .

(1) *Soient $a_1, a_2, ...a_n$ et $b_1, b_2, ...b_n$ des réels tels que les a_n sont non tous nuls. Soit $P(x) = \sum_{j=1}^{n} \big(|a_j| + x|b_j|\big)^2$. Montrer que le discriminant de ce polynôme est ≤ 0, en déduire*

(a) *l'inégalité de Cauchy-Schwarz:*
$\big(\sum_{j=1}^{n} |a_j||b_j|\big)^2 \leq \big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\big)\big(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\big)$

(b) *et l'inégalité de Minkowski: $\big(\sum_{j=1}^{n} (|a_j| + |b_j|)^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$*

(2) *Montrer que si $a_1, a_2, ...a_n$ et $b_1, b_2, ...b_n$ sont des réels positifs tels que: $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ et $\sum_{j=1}^{k} b_j \leq \sum_{j=1}^{k} a_j$ pour tout $1 \leq k \leq n$ alors $\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^2$*

(3) *Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs vérifiant: $\sum_{j=1}^{n} a_j \geq \sqrt{n}$, pour tout $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$*