UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 G 26 A01
4 heures
Série S2-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*).

Les 1), 2) et 3) de cet exercice sont faits chacun de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle et vraie ou fausse.

1. L'évènement contraire de « A sachant B » est : $0,5$ *pt*

a. $\overline{A}$ sachant B. **b.** A sachant $\overline{B}$.
c. $\overline{A}$ sachant $\overline{B}$. **d.** $\overline{A} \cap B$

2. Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a : $0,5$ *pt*

a. $p(E/F) = 0$. **b.** $p(E \cup F) = p(E) \times p(\overline{F}) + p(F)$.
c. $p(E \cap F) = 0$. **d.** $p(E/F) = 1$.

3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où $n = 4$ et $p \in]0, 1[$: $0,75$ *pt*

a. Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $p(X = 2) = 2 \times p(X = 1)$.
b. Si $p = \dfrac{1}{4}$, alors $p(X = 3) > \dfrac{1}{4}$.
c. Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $p(X > 1) = 1$.
d. Si $p(X = 1) = 8 \times p(X = 0)$, alors $p = \dfrac{2}{3}$.

4. Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives z_A et z_B. Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B. Notons z et z' les affixes respectives de M et M'. Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

a. $|z - z_A| = 1$. $0,25$ *pt*
b. $|z - z_A| = |z - z_B|$. $0,5$ *pt*
c. $|z'| = |z_A - z_B|$. $0,5$ *pt*
d. $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - z_A}{z' - z_B}\right)$. $0,5$ *pt*

Exercice 2 (5 *points*). Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i, z \in \mathbb{C}$.

1. a. Démontrer que $2 + i$ est une racine de $p(z)$. $0,25$ *pt*
b. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. 1 *pt*

2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i, -1 - 2i$ et $-4 + i$.
a. Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC. $0,75$ *pt*
b. Démontrer que $\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$ $0,25$ *pt*
c. En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ $0,25$ *pt*
d. Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. $0,25$ *pt*

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
a. Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$. $0,5$ *pt*
b. Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r. $0,25$ *pt*

4. Soit $T : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha, z, z' \in \mathbb{C}$.
a. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2.
b. Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ 0, 25 *pt*

5. On considère la transformation $g = r \circ T$. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.
a. Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$. 0, 25 *pt*
b. Donner les éléments géométriques caractéristiques de g.

Exercice 3. Au Sénégal une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté Y (X et Y sont en milliards de FCFA). On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1, 2	0, 5	1	1	1, 5	1, 8
Y	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.
Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. 1 *pt*

2. a. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X. 1 *pt*
b. Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaire de 300 milliards si cette tendance se poursuit. 0, 5 *pt*

Exercice 4 (09 *points*).

A

1. En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout réel α :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^t \ (t+2) \ dt$$

0, 5 *pt*

En déduire $I(x)$. 0, 25 *pt*

2. Soit k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h telle que

$$h(x) = k(x)\mathrm{e}^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On se propose de déterminer la fonction h de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) & = & x+2 \\ h(0) & = & 0 \end{cases}$$

3. a. Vérifier que $k'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$. 0, 5 *pt*
b. En déduire k puis h. $0.25 + 0,25$ *pt*

B

I

1. Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

. 01, 5 *pt*

2. En déduire que $g(x)$ est strictement positif. $0,25$ *pt*

II Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x + 1 + \mathrm{e}^{-x}),$$

(Cf) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. $02,5$ *pt*

2. Pour tout x strictement positif, on note M, le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse x et N le point de (Cf) de même abscisse.

a. Démontrer que $0 < MN < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$. $0,25$ *pt*

b. Quelle est la limite de MN quand x tend vers $+\infty$

3. a. Démontrer que : $f(x) = -x + \ln(x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1), x \in \mathbb{R}$. $0,5$ *pt*

b. En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de et déterminer la position de (C_f) par rapport à pour $0,25 + 0.25$ *pt*

4. Construire (C_f) et dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. 1.5 *pt*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 G 26 A01
4 heures
Série S2-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. Réponse juste *a*.
L'évènement contraire de « A sachant B » est $\overline{A}$ sachant B.
Les autres réponses sont fausses en général (Comment le montrer sans perdre trop de temps ?).

2. Réponse juste *b*.
E et F sont indépendants signifie par définition $p(E \cap F) = p(E) \times p(F)$.
Donc :

$$\begin{aligned} p(E \cup F) &= p(E) + p(F) - p(E \cap F) && \text{formule des probabilités totales} \\ &= p(E) + p(F) - p(E)\ p(F) && \text{indépendance de } E \text{ et } F \\ &= p(E)\Big[1 - p(F)\Big] + p(F) \\ &= p(E)p(\overline{F}) + p(F) \end{aligned}$$

Les autres réponses sont fausses en général.

3. Réponse juste *d*.
X suit une loi binomiale de paramètres 4 et p signifie que X prend ses valeurs dans $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et pour tout $k \in V, p(X = k) = C_4^k p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$.
Donc $p(X = 1) = C_4^1 pq^3 = 4p(1-p)^3$ et $p(X = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = (1-p)^4$ et $p(X = 1) = 8p(X = 0)$ signifie $4p(1-p)^3 = 8(1-p)^4$ soit en simplifiant par le réel non nul $4(1-p)^3$: $p = 2(1-p)$. Par conséquent $p = \dfrac{2}{3}$.
Les autres réponses sont fausses.

4. Il faut savoir que si P et Q sont des points d'affixes respectives α et β, alors $|\alpha - \beta| = PQ$, longueur du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ ou distance de P à Q.
Et si P et Q sont non nuls, arg $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est une mesure modulo 2π de l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ Donc

a. $|z - z_A| = 1$ signifie $AM = 1$.
b. $|z - z_A| = |z - z_B|$ signifie $AM = BM$ autrement dit M appartient à la médiatrice du segment $[A, B]$ (A et B sont distincts puisque l'énoncé parle de *deux* points)
c. $|z'| = |z_A - z_B|$ signifie $OM = AB$ autrement dit M appartient cercle de centre O et de rayon AB.
d. $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - z_A}{z' - z_B}\right)$ signifie $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})[2\pi]$. Les points A, B, M, M' sont donc alignés ou cocycliques.
S'ils sont cocycliques, M et M' appartiennent au même arc d'extrémités A et B ; s'ils sont alignés, M et M' appartiennent au segment $[A, B]$ ou à la même demi droite d'origine A.

Correction de l'exercice 2.

Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i, z \in \mathbb{C}$.

1. a. $2+i$ est une racine de p car $p(2+i)=0$.

b. $z_0 = 2+i$ étant une racine de p, le polynôme $z-z_0$ est un facteur de p et comme p est un polynôme de degré 3, l'autre facteur est un polynôme q de degré 2. Il existe donc des complexes a, b, c tels que $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z-z_0)(az^2+bz+c)$.

Pour trouver les coefficients a, b, c, il y a diverses *méthodes* : identification, Horner, division euclidienne.

Choisissons la division euclidienne.

$$
\begin{array}{cccc|l}
z^3 & +3z^2 & -3z & -5-20i & z-2-i \\ \cline{5-5}
z^3 & -(2+i)z^2 & & & z^2+(5+i)z+6+7i \\ \cline{1-4}
 & (5+i)z^2 & -3z & -5-20i & \\
 & (5+i)z^2 & -(9+7i)z & & \\ \cline{2-4}
 & & (6+7i)z & -5-20i & \\
 & & (6+7i)z & -5-20i & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ autres que z_0 de l'équation $p(z)=0$ sont les racines de q.

$q(z) = z^2+(5+i)z+6+7i$ est un polynôme du second degré ; son discriminant est $\Delta = b^2-4ac = (5+i)^2-4(6+7i) = -18i$.

Si on se souvient de « l'identité remarquable » $2i = (1+i)^2$, on trouve

$$\Delta = \Big[3i(1+i)\Big]^2 = \Big[3(-1+i)\Big]^2$$

Sinon il y a une *méthode* pour trouver une racine carrée de Δ :

On cherche un complexe $\delta = u+iv$ tel que $\Delta = \delta^2$ c'est à dire $u^2-v^2+2iuv = -18i$ ou
$\begin{cases} u^2-v^2 & = 0 \\ uv & = -9 \end{cases}$

Pour *simplifier* les calculs, on introduit la relation $|\Delta| = |\delta|^2$ c'est à dire $u^2+v^2 = 18$.

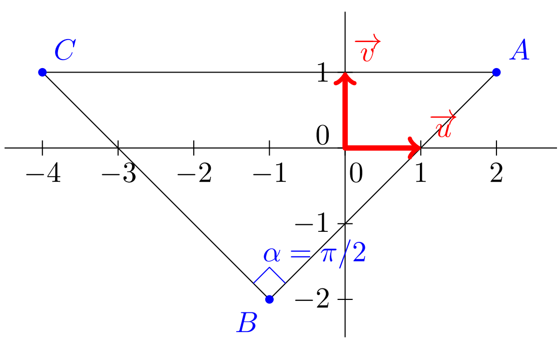
Finalement on obtient : $\begin{cases} u^2+v^2 & = 18 \\ u^2-v^2 & = 0 \\ uv & = -9 \end{cases}$

Le système constitué par les deux premières équations se résout facilement (c'est un système *linéaire* en les inconnues u^2, v^2).

En effet, en faisant la somme puis la différence on trouve $u^2 = v^2 = 9$; et comme la dernière relation nous dit que u et v sont de *signe contraire*, on peut prendre $\delta = 3(1-i)$ (Nous n'avons pas besoin de toutes les racines carrée, et d'ailleurs, nous savons qu'il y en a deux qui sont opposées).

Finalement, les racines de q sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} = -1-2i$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a} = -4+i$; et les racines de p sont $z_0 = 2+i, z_1 = -1-2i$ et $z_2 = -4+i$. Ce sont les affixes respectives des points A, B et C.

2. a.



Comme déjà noté dans l'exercice précédent,

$$AB = |z_B - z_A| = |3+3i| = 3\sqrt{2} \text{ et } BC = |z_C - z_B| = |-3-3i| = 3\sqrt{2}.$$

b. $\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z_C - z_B) - \arg(z_A - z_B) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BA})[2\pi] = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$

c. Or $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{3-3i}{-3-3i} = \dfrac{(1-i)^2}{2} = i$ donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg i = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

d. Puisque $BA = BC$, le triangle CBA est isocèle de sommet principal B.
Puisque $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ le triangle CBA est direct et rectangle en B.

3. a. La rotation r a pour centre B et pour angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, donc

$$f(z) = e^{i\pi/2}(z - z_B) + z_B = i(z+1+2i) - 1 - 2i = iz - 3 - i$$

b. Nous l'avons dit : r a pour centre B et pour angle $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

4. Soit $T : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha, z, z' \in \mathbb{C}$.

a. Pour que T soit une homothétie de rapport 2 *il faut et il suffit* que le coefficient $i\alpha^2$ de z soit égal à 2 c'est à dire $\alpha^2 = 2/i = -2i$.

α est donc une racine carrée de $-2i$. Nous avons déjà exposé dans le calcul d'une racine carrée du discriminant Δ comment trouver α : $\alpha = -1+i$ ou $\alpha = 1-i$

b. $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ signifie que $\alpha = \sqrt{2}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4) = 1 - i$; donc d'après la question précédente, T est une homothétie de rapport 2 et son écriture complexe est $z' = 2z + 1 - i$. L'affixe de son centre est la solution de l'équation $z = 2z + 1 - i$ c'est à dire $z = -1 + i$.

Les éléments géométriques caractéristiques de T sont son rapport $k = 2$ et son centre le point d'affixe $1 - i$.

5. On considère la transformation $g = r \circ T$.

a. Notons t l'application $z \mapsto 2z + 1 - i$ associée à T. Pour tout complexe z on a :

$$h(z) = f\big[t(z)\big] = it(z) - 3 - i = i(2z + 1 - i) - 3 - i = 2iz - 2$$

b. $h(z) = az + b$ avec $a = 2i$ et $b = -2$.
g est donc la similitude plane directe de :
- rapport $|a| = 2$.
- d'angle $\arg a = \pi/2$.
- de centre le point d'affixe la solution de l'équation $h(z) = z$ c'est à dire $2iz - 2 = z$.

On a donc $z = \dfrac{2}{2i-1} = -\dfrac{2(2i+1)}{5} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$.

Correction de l'exercice 3.

1. Le coefficient de corrélation linéaire r est défini par

$$r = \frac{\text{cov }(X;Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Donc $r = 0,689$.

2. a. La droite δ de régression de Y en X a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov }(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ soit $y = 92,59x - 4,35$

b. La somme s qu'il faut invertir si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards est l'ordonnée (en milliards) du point de δ d'abscisse 300 soit $s = 3.29$ milliards .

Correction de l'exercice 4.

A

1. On intègre par parties en posant $u = t+2$ et $v' = \mathrm{e}^t$. Alors $u' = t$ et on on peut prendre $v = \mathrm{e}^t$. On obtient

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^\alpha uv'\,dt = \left[uv\right]_{t=0}^{t=\alpha} - \int_0^\alpha u'v\,dt \\ &= \left[\mathrm{e}^t\ (t+2)\right]_{t=0}^{t=\alpha} - \int_0^\alpha \mathrm{e}^t\,dt \\ &= \mathrm{e}^\alpha\ (\alpha+2) - 2 - \left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=\alpha} \\ &= \mathrm{e}^\alpha\ (\alpha+1) - 1 \end{aligned}$$

Pour avoir $I(x)$, il suffit, dans l'expression de $I(\alpha)$, de remplacer α par x :
$I(x) = \mathrm{e}^x\ (x+1) - 1$.

2. a. h est dérivable car k l'est et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{-x} - k(x)\mathrm{e}^{-x} = \big(k'(x) - k(x)\big)\mathrm{e}^{-x}$$

La relation $h'(x) + h(x) = x+2$ devient $k'(x)\mathrm{e}^{-x} = x+2$ ou

$$k'(x) = \mathrm{e}^x(x+2) = I'(x)$$

b. Par conséquent, k et I ne différent que d'une constante additive : Il existe un réel c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, k(x) = I(x) + c$; en particulier $k(0) = I(0) + c$ ou $h(0) = c$; donc $c = 2, \forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \mathrm{e}^x\ (x+1) + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x}$

B

I

1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Cette dérivée s'annule si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} = 1$ c'est à dire en composant avec la fonction ln : $x = 0$. Elle est > 0 si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} < 1$, soit, en composant avec la fonction strictement croissante ln : $x > 0$.

Quand x tend vers $+\infty, x+1$ tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0 ; donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

Quand x tend vers $-\infty, x+1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} tend vers $+\infty$; nous somme donc en présence d'une indétermination de la forme $-\infty + \infty$; ce qui justifie les transformations suivantes : $g(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1 + x\left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)$.

Comme nous savons que $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

Voici le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le tableau de variations de $g, 2$ est un minimum de g ; donc $\forall x \in \mathbb{R} g(x) \geq 2 > 0$.

II

1. $f = \ln \circ g$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}, x \in D_f$ si et *seulement si* $x \in D_g$ et $g(x) \in D_{\ln}$ c'est à dire $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) > 0$. Ces deux conditions étant toujours remplies, $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$; elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car g et ln le sont et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$. Cette dérivée s'annule si et seulement si $g'(x) = 0$ c'est à dire $x = 0$. Elle est > 0 si et *seulement si* $g'(x) > 0$, soit $x > 0$.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln[g(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln[g(x)] = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a. Pour tout x strictement positif, M a pour coordonnées $(x, \ln x)$ et N a pour coordonnées $(x, \ln[g(x)])$, donc le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\big(0, \ln[g(x)] - \ln x\big) = \left(0, \ln \dfrac{g(x)}{x}\right)$ et $\overrightarrow{MN} = \ln \dfrac{g(x)}{x} \overrightarrow{j}$.

Après avoir orienté la droite (MN) par le vecteur $\overrightarrow{j}$, on a donc $\overline{MN} = \ln \dfrac{g(x)}{x}$.

$g(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x}$ est $> x$ car $1 + \mathrm{e}^{-x}$ est > 0 ; donc $\dfrac{g(x)}{x} > 1$ et comme la fonction ln est strictement croissante, $\overline{MN} = \ln \dfrac{g(x)}{x} > \ln 1 = 0$.

$\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) - \overline{MN} = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) - \ln \dfrac{g(x)}{x} = \ln \dfrac{x+2}{g(x)}$

Mais $x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-x} < 1 \Rightarrow x + 1 + \mathrm{e}^{-x} < x + 2$ c'est à dire $g(x) < x + 2$ ou $\dfrac{x+2}{g(x)} > 1$; donc $\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) - \overline{MN} = \ln \dfrac{x+2}{g(x)} > \ln 1 = 0$ et $\overline{MN} < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

b. On a pour tout réel x strictement positif $0 < \overline{MN} < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \ln 1 = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \overline{MN} = 0.$[1]

3. a. On a pour tout réel x en mettant e^{-x} en facteur : $g(x) = x+1+\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+1\right)$; donc $f(x) = \ln[g(x)] = \ln\left[\mathrm{e}^{-x}\left(x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+1\right)\right] = \ln \mathrm{e}^{-x} + \ln(x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+1) = -x + \ln(x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+1)$.

b. Posons, pour tout réel $x, \varphi(x) = \ln(x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1)$, de sorte que $f(x) + x = \varphi(x)$.

Quand x tend vers $-\infty$, $x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1$ a pour limite 1, donc $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \varphi(x) = 0$; par conséquent, la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Pour connaître la position de (C_f) par rapport à Δ, il suffit de connaître le signe de $\varphi(x)$, donc de comparer $x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1$ et 1.

$x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1 - 1 = (x+1)\mathrm{e}^{x}$. Cette quantité a le signe de $x + 1$.

Donc : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} + 1 > 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \ln 1 = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ est au dessus Δ dans $]-\infty, -1[$. (Les *équivalences* montrent que $x \leq -1 \Leftrightarrow (C_f)$ est au dessous Δ dans $[-1, +\infty[$.)

1. Ceci démontre que la courbe C_f est dessus de la courbe $C_{\ln}$ et que les deux sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.

4. On a pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln[g(x)]}{g(x)} \times \frac{g(x)}{x}\\ &= \frac{\ln[g(x)]}{g(x)} \times \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)\end{aligned}$$

Puisque $g(x)$ tend vers $+\infty$ avec x, le facteur $\dfrac{\ln[g(x)]}{g(x)}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$; quant au facteur $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$, il a pour limite 1 ; donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et (C_f) admet une branche infinie de direction l'axe des abscisses.

En remarquant que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on voit, sans calculs supplémentaires, que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe (C_g), quand x tend vers $+\infty$; donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{g(x)}{x} =$ coefficient directeur de cette droite $= 1$

On peut aussi aussi transformer $\dfrac{f(x)}{x}$ comme ceci, après avoir remarqué que intuitivement « e^{-x} est très petit par rapport à $x+1$ quand x tend vers $+\infty$ ».

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln\left[(x+1)\left(1+\dfrac{1}{(x+1)\mathrm{e}^x}\right)\right]}{x}\\ &= \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{(x+1)\mathrm{e}^x}\right)}{x}\end{aligned}$$

Chacun de ces deux rapports ayant pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
Voici la courbe (C_f) son asymptote Δ et sa courbe asymptote $(C_{\ln})$.