UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*).

Soit Γ l'ensemble des triplets $T = (p, q, r)$ d'entiers relatifs, avec r non nul, vérifiant :

$$(E)\ : p^2 + q^2 = r^2$$

L'espace euclidien orienté est muni d'un repère orthonormé direct. On fait correspondre à tout (p, q, r) de Γ le point M de coordonnées $(p, q, 0)$.

Un élément (p, q, r) de Γ est dit non trivial si p et q sont non nuls.

1. a. Montrer que $T' = (3, 4, 5)$ et $T'' = (5, 12, 13)$ sont des éléments de Γ. 2×0.5 *pt*

b. Soit k un entier relatif non nul. Montrer que $T = (p, q, r)$ est un élément de Γ si et seulement si $kT = (kp, kq, kr)$ est un élément de Γ. 0.5 *pt*

Un élément (p, q, r) non trivial de Γ est dit irréductible si p, q et r sont premiers entre eux.

2. Soit T_1 et T_2 deux éléments irréductibles de Γ, M_1 et M_2 leurs points correspondants respectifs.

a. Montrer alors que le triplet $\left(|\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}|,\ \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|, \|\overrightarrow{OM_1}\| \times \|\overrightarrow{OM_2}\|\right)$ est un élément de Γ. 1 *pt*

Dans la suite, ce triplet est noté $T_1 * T_2$.

b. Vérifier que le triplet $T_1 * T_2$ est trivial si et seulement si les droites (OM_1) et (OM_2) sont confondues ou perpendiculaires. 0.75 *pt*

c. En utilisant T' et T'', déduire de la question 2.a) trois autres solutions irréductibles de l'équation (E). 0.75 *pt*

Exercice 2 (4 *points*).

O et A sont deux points distincts du plan euclidien orienté. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon OA. M est un point de $(\mathcal{C})$. On pose $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

On note B et C les points de $(\mathcal{C})$ tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2\theta + \pi\ [2\pi]$.

1. On note A' le symétrique de A par rapport à la droite (OM). Montrer que A' et C sont symétriques par rapport à O. En déduire une construction de C.

Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. 2×0.25 *pt*

On prend OA comme unité et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur tel que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit un repère orthonormé direct. Dans la suite le plan est supposé rapporté à ce repère.

On note z, b et c les affixes respectives des points M, B et C.

2. a. Ecrire z, b et c sous forme exponentielle puis vérifier que $b = iz$ et $c = -z^2$. 0.75 *pt*

Soit H le point d'affixe $h = 1 + b + c$.

b. Soit N le point d'affixe $1 + b$. Construire N puis déduire une construction de H. 2×0.25 *pt*

3. Désormais on suppose que $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

a. Justifier que les points A, B et C sont distincts deux à deux.

Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{1+iz}{1-iz}$. Vérifier que $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est un imaginaire pur. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC. 1 *pt*

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - iz - 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC en fonction de b et c.

En déduire les valeurs de θ pour que H soit le centre de gravité du triangle ABC. Quelle est alors la nature du triangle ABC ? 4×0.25 *pt*

4. Vérifier que lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points d'affixes i et $-i$, le point H appartient à la courbe $(\mathcal{H})$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) &= 1 - \sin t - \cos 2t \\ y(t) &= \cos t - \sin 2t \end{cases}$$

0.25 *pt*

PROBLEME (12 *points*).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\,cm$.

Partie A (4 *points*)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$f(x) = 1 - x^2 + \ln(1-x)$$

1. a. Etudier la fonction f et représenter graphiquement sa courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 0.75 *pt*

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in [1/2,\ \beta]$ avec $\beta = 1 - 1/\mathrm{e}$. 0.75 *pt*

2.

a. Soient p et q les fonctions définies sur $[1/2\ , \beta]$ respectivement par :

$$p(x) = |f'(x)| \text{ et } q(x) = |f''(x)|.$$

Etudier les variations de p et q et dresser leurs tableaux de variations.

0.75 *pt*

b. En déduire que : $\forall x, y \in [1/2\ , \beta], \dfrac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq M$ avec $M = \dfrac{\mathrm{e}^2+2}{3}$.

0.5 *pt*

3. Soit t un élément de $]\alpha, 1[$.

a. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^t \ln(1-x)\ dx$. 0.5 *pt*

b. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)\ dx$ et montrer que $\displaystyle\lim_{t\mapsto 1^-}\int_\alpha^t f(x)\ dx = P(\alpha)$ où P est un polynôme à déterminer. 0.75 *pt*

Partie B (5 *points*)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soient u et v deux réels tels que $u < v$.

Soit h une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant l'intervalle $J = [u, v]$, dérivable jusqu'à l'ordre 2 et ayant u comme unique zéro dans J. On suppose que h est négative sur J ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et que $\forall x \in J, h'(x) \neq 0$.

On considère la fonction T définie sur J par $T(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$.

a. Soit a un élément de J et A le point d'abscisse a de la courbe C_h représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que $T(a)$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_h en A avec l'axe des abscisses.

Montrer que T est dérivable dans J et monotone ; dresser son tableau de variation. En déduire que $T(J) \subset J$. 1.5 *pt*

On pose $x_0 = v$ et pour tout entier naturel $n, x_{n+1} = T(x_n)$.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.

Vérifier qu'elle est monotone, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

1.5 *pt*

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et deux fois dérivable.

Soit k un réel fixé. on considère la fonction G définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b], G(x) = g(a) - g(x) - (a - x)g'(x) - \frac{1}{2}k(a - x)^2$$

a. Calculer $G(a)$. Déterminer k pour que $G(b)$ soit égal à 0. 1 *pt*

Désormais k prend cette valeur.

b. En appliquant le théorème des accroissements finis à G dans l'intervalle $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $G'(c) = 0$.

En déduire que : $g(a) = g(b) + (a - b)g'(b) + \dfrac{1}{2}(a - b)^2 g''(c)$ 1 *pt*

Partie C : Application à la fonction f. (3 *points*)

1. a. Démontrer que la fonction f satisfait dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, aux hypothèses faites sur la fonction h de la partie B. 0.5 *pt*

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par son premier terme $x_0 = \beta$ et pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel c_n dans $]\alpha, x_n[$ tel que

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n)$$

0.5 *pt*

c. En déduire que $(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)^2 \dfrac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$ et $x_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$ 0.5 *pt*

2. Pour tout entier naturel n on pose : $\delta_n = \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$\delta_n \leq {\delta_0}^{2^n} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n} \text{ (Remarquer que } \delta_0 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha) \leq \frac{M}{4}.\text{)}$$

0.5 *pt*

b. Déterminer un entier naturel n tel que $x_n - \alpha$ soit inférieur à 10^{-5} et une valeur approchée de α à 10^{-5} près par excès. 1 *pt*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. a. Il suffit de l'écrire.

b. Soit k un entier non nul et $T = (p, q, r)$ un triplet d'entiers relatifs tel que r non nul.

$$T \in \Gamma \Leftrightarrow p^2 + q^2 = r^2 \Leftrightarrow (kp)^2 + (kq)^2 = (kr)^2 \Leftrightarrow kT \in \Gamma$$

2. a. Posons $T_1 = (p_1, q_1, r_1)$ et $T_2 = (p_2, q_2, r_2)$. Alors.

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} & = & p_1p_2 + q_1q_2 \\ \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| & = & \|(p_1q_2 - p_2q_1)\overrightarrow{k}\| \quad = \quad |p_1q_2 - p_2q_1| \\ \text{et } \|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\| & = & r_1r_2 \end{array}$$

sont bien des entiers. Ensuite

$$\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 & = & \|\overrightarrow{OM_1}\|^2.\|\overrightarrow{OM_2}\|^2 \cos^2\theta \\ \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 & = & \|\overrightarrow{OM_1}\|^2.\|\overrightarrow{OM_2}\|^2 \sin^2\theta \end{array}$$

Donc

$$\left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 + \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 = \left(\|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\|\right)^2$$

et $T_1 * T_2 \in \Gamma$.

Ou bien :

$$\begin{array}{lclcl} \left(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right)^2 + \|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 & = & (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + |p_1q_2 - p_2q_1|^2 & = & p_1^2p_2^2 + q_1^2q_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2 \\ & = & (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) & = & r_1^2r_2^2 \\ & = & \left(\|\overrightarrow{OM_1}\|.\|\overrightarrow{OM_2}\|\right)^2 & & \end{array}$$

b. Le triplet $T_1 * T_2$ est trivial si et seulement si $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = 0$ (c'est à dire (OM_1) et (OM_2) sont perpendiculaires) ou $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = 0$ (c'est à dire $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires donc (OM_1) et (OM_2) sont confondues).

c. Notons M' et M'' les points associés au triplets T' et T''.

Alors $S' = T' * T'' = \left(\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}, \|\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{OM''}\|, \|\overrightarrow{OM'}\|.\|\overrightarrow{OM''}\|\right) = (63, 16, 65)$ appartient à Γ et il est irréductible.

$T_0'' = (-5, 12, 13)$ est aussi un élément de Γ ; notons M_0'' le point associé au triplet T_0''.

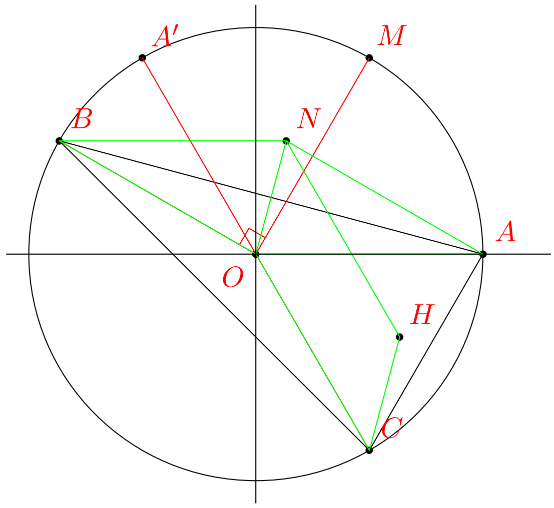
Alors $S'' = T' * T_0'' = \left(\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM_0''}, \|\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{OM_0''}\|, \|\overrightarrow{OM'}\|.\|\overrightarrow{OM_0''}\|\right) = (33, 56, 65)$ appartient à Γ et il est irréductible.

Notons N' et N'' les points associés au triplets S' et S''.

Alors $S' * S'' = \left(\overrightarrow{ON'}.\overrightarrow{ON''}, \|\overrightarrow{ON'} \wedge \overrightarrow{ON''}\|, \|\overrightarrow{ON'}\|.\|\overrightarrow{ON''}\|\right) = (2975, 3000, 4225)$ appartient à Γ mais est réductible. Le triplet irréductible correspondant est $(119, 120, 169)$.

on obtient d'autres triplets en combinant par exemple T' et S' ou T'' et S' etc...

Correction de l'exercice 2.



1. A' appartient $\mathcal{C}$ car la droite (OM) est un axe de symétrie de ce cercle.
De plus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\theta\ [2\pi]$.
C appartient $\mathcal{C}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2\theta + \pi\ [2\pi]$.
Il vient : $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi\ [2\pi]$.
Donc A' et C sont bien symétriques par rapport à O.

2. a. $b = \mathrm{e}^{i(\theta+\pi/2)} = \mathrm{e}^{i\pi/2}.\mathrm{e}^{i\theta} = iz$ et $c = \mathrm{e}^{i(2\theta+\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi}.\mathrm{e}^{2i\theta} = -z^2$.

b. $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; donc N est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont B, O et A.
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC}$; donc H est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont C, O et N.

3. θ est différent de $\pi/2\ [\pi]$ signifie que z est différent de i et de $-i$
Alors $b = iz$ différent de 1 (et de -1) ; A et B sont donc distincts.
De même $c = -z^2$ différent de 1 (et de -1) ; A et C sont donc distincts.
Enfin $b - c$ est différent de 0 (et de -2) ; par conséquent B et C sont distincts.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{b+c}{b-c} = \frac{iz - z^2}{iz + z^2} = \frac{1 - iz}{1 + iz} \quad \text{et} \quad \frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{1+b}{1-b} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

Ensuite :
$$\begin{aligned} \frac{1+iz}{1-iz} &= \frac{1+\mathrm{e}^{2i\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2i\alpha}} \text{ avec } \alpha = \theta/2 + \pi/4 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - \mathrm{e}^{i\alpha}} \\ &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} i \text{ est bien imaginaire pur} \end{aligned}$$

On en déduit que les angles $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{BA})$ sont droits ; H est donc l'intersection des hauteurs c'est à dire l'orthocentre du triangle ABC.
a. Le discriminant de l'équation est $i^2 + 4 = 3$. Les racines de l'équation sont donc $z_1 = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$ et $z_1 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{5i\pi/6}$
Le centre de gravité G du triangle ABC est $\dfrac{1}{3}(1 + b + c)$.
Pour que H coïncide avec G il faut et il suffit que $1 + b + c$ soit égale à $\dfrac{1}{3}(1 + b + c)$ c'est à dire que $1 + b + c = 0$ ou $z^2 - iz - 1 = 0$. Donc H coïncide avec G si et seulement si $\theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$

4. Puisque l'affixe z s'écrit $\cos\theta + i\sin\theta$, celle de H s'écrit :

$$\begin{aligned} 1 + iz - z^2 &= 1 + i(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= 1 - \sin\theta + i\cos\theta - \cos 2\theta - i\sin 2\theta \qquad \text{formule de Moivre} \\ &= 1 - \sin\theta - \cos 2\theta + i(\cos\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

Donc H est le point de $\mathcal{H}$ de paramètre θ.

PROBLEME. Partie A

1. a. la fonction f est définie et continue sur $[0,1[$.
Elle est dérivable dans cet intervalle et

$$\forall x \in [0,1[,\ f'(x) = -2x - \frac{1}{1-x}$$

La dérivée, somme de deux réels négatifs dont l'un l'est strictement, est strictement négative. $f(0) = 1$ et $\lim_{x \mapsto 1^-} f(x) = -\infty$.
Voici le tableau de variation de f.

x	0	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$

La fonction f est strictement décroissante et envoie l'intervalle $[0,1[$ sur l'intervalle $[-\infty,1[$ qui contient 0, donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.

b. $f(1/2) = 3/4 - \ln 2 > 0$ et $f(\beta) = -\beta^2 < 0$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, α appartient à l'intervalle $]1/2, \beta[$.

2. Posons pour simplifier $I_\beta =]1/2, \beta]$.
f est deux fois dérivable dans $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[,\ f''(x) = -2 - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Alors $\forall x \in I_\beta,\ p(x) = 2x + \dfrac{1}{1-x}$ et $q(x) = 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
p et q sont dérivables sur I_β et

$$\forall x \in I_\beta,\ p'(x) = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } q'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ces dérivés sont positives.
Voici les tableaux de variation de p et q.

x	$1/2$	β
$p'(x)$	$+$	
$p(x)$	3 ↗	$p(\beta)$

x	$1/2$	β
$q'(x)$	$+$	
$q(x)$	6 ↗	$\mathrm{e}^2 + 2$

Ces tableaux montrent clairement que

$$\forall x \in I_\beta,\ 3 \leq |f'(x)| \text{ et } |f''(x)| \leq \mathrm{e}^2 + 2$$

ce qui entraîne bien

$$\forall x, y \in I_\beta, \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq \frac{\mathrm{e}^2 + 2}{3} = M$$

3. a. On peut procéder à une IPP en posant $u = \ln(1-x)$ et $v = 1 - x$, il vient $u' = -\dfrac{1}{1-x}$ et $v' = -1$ puis

$$\int_\alpha^t \ln(1-x)dx = -\int_\alpha^t uv'dx = -[uv]_\alpha^t + \int_\alpha^t u'vdx = \Big[-x - (1-x)\ln(1-x)\Big]_\alpha^t$$

Il est probable que le candidat fasse le changement de variable $1 - x = u$ pour se ramener à $\int \ln u du = u \ln u - u$. Il peut aussi faire une IPP en posant $u = \ln(1-x)$ et $v' = 1$ et s'il choisit $v = x$, il devra trouver une primitive de $\dfrac{x}{1-x}$ en procédant à une réduction en éléments simples

b. $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)dx = \int_\alpha^t (1-x^2)dx + \int_\alpha^t \ln(1-x)dx$. Donc

$$\int_\alpha^t f(x)dx = \varphi(t) - \varphi(\alpha) \text{ avec } \varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 - (1-x)\ln(1-x)$$

Lorsque t tend vers 1^-, $(1-t)\ln(1-t)$ a pour limite 0, donc

$$\lim_{t \mapsto 1^-} \int_\alpha^t f(x)\,dx = -1/3 - \varphi(\alpha).$$

Mais $f(\alpha) = 0$ signifie $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$

$$\lim_{t \mapsto 1^-} \int_\alpha^t f(x)\,dx = P(\alpha) \text{ avec } P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{4}{3}$$

Partie B

1. a. La tangente en A à $\mathcal{C}_h$ a pour équation $y = h'(a)(x-a) + h(a)$. l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0, son abscisse x est donc telle que $h'(a)(x-a) + h(a) = 0$ c'est à dire $x = a - \dfrac{h(a)}{h'(a)} = T(a)$.

b. T, rapport de deux fonctions dérivables, est dérivable et

$$\forall x \in J,\ T'(x) = 1 - \frac{(h'(x))^2 - h(x)h''(x)}{(h'(x)^2} = \frac{h(x)h''(x)}{(h'(x))^2}$$

T' est donc positive sur J.

Mais $T(v) = v - \dfrac{h(v)}{h'(v)}$ est $\leq v$ car le rapport h/h' est ≥ 0;

donc $T(J) = [u, T(v)] \subset [u, v] = J$.

Voici le tableau de variation de T.

x	u	v
$T'(x)$	+	
$T(x)$	u $\nearrow$	$T(v)$

2. a. Montrons que la suite (x_n) est bien définie et contenue dans J donc bornée.

Par récurrence. $x_0 = v$ existe et appartient à J.

Si la propriété est vraie pour un rang n donné, c'est à dire si x_n existe et appartient à J, alors $x_{n+1} = T(x_n)$ existe et appartient bien à J car $T(J)$ est contenu dans J. Donc la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = T(x_n) = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ est $\leq x_n$

car le rapport h/h' est ≥ 0; donc la suite (x_n) est décroissante.

Comme elle est minorée par u, elle converge vers un réel $\ell \geq u$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = T(x_n)$ on obtient par passage à la limite $T(\ell) = \ell$ c'est à dire $\ell - \dfrac{h(\ell)}{h'(\ell)} = \ell$ ou $h(\ell) = 0$. Comme u est l'unique zéro de h, $\ell = u$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = u$.

Partie C

1. a. $G(a) = 0$.

b. $G(b) = 0$ est équivalent à : $g(a) - g(b) - (a-b)g'(b) - \dfrac{1}{2}k(a-b)^2$

c'est à dire $k = \dfrac{2}{(a-b)^2}\Big[g(a) - g(b) - (a-b)g'(b)\Big]$.

2. a. La fonction G satisfait aux hypothèses du théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[a, b]$; donc il existe un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $G(b) - G(a) = G'(c)(b-a)$ c'est à dire $G'(c) = 0$.

b. On a pour tout x dans $[a, b], G'(x) = -(a-x)g''(x) + k(a-x)$.

$G'(c) = 0$ est donc équivalent à : $k = g''(c)$ c'est à dire

$$\frac{2}{(a-b)^2}\Big[g(a) - g(b) - (a-b)g'(b)\Big] = g''(c)$$

$$\text{ou } g(a) - g(b) - (a-b)g'(b) = \frac{1}{2}(a-b)^2 g''(c);$$

$$\text{enfin } g(a) = g(b) + (a-b)g'(b) + \frac{1}{2}(a-b)^2 g''(c)$$

3. a. D'après les calculs faits dans la première partie, la fonction f satisfait bien dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ aux hypothèses faites sur h.

b. Pour tout entier naturel n, cette même fonction f satisfait, dans l'intervalle $[\alpha, x_n]$, aux hypothèses faites sur g. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in]\alpha, x_n[\text{ tel que } f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n) \quad (*)$$

4. Pour obtenir la relation $(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)^2 \dfrac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \quad (**)$

il suffit de se rappeler que $f(\alpha) = 0$ et de diviser la relation $(*)$ par le réel non nul $f'(x_n)$.

D'après la première partie, puisque x_n et c_n appartiennent à I_β, $\dfrac{|f''(c_n)|}{|f'(x_n)|} \leq M$ et $(**)$ entraîne $(x_{n+1} - \alpha) \leq \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$

5. Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)$, la relation $0 \leq (x_{n+1} - \alpha) \leq \dfrac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$ se traduit par $0 \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^2$

Montrons que $\delta_n \leq {\delta_0}^{2^n} \leq \left(\dfrac{M}{4}\right)^{2^n}$. Par récurrence.

Cette propriété est vrai au rang 0 car à ce rang elle signifie $\delta_0 \leq \delta_0 \leq \dfrac{M}{4}$

Si elle est vraie pour un rang donné n c'est à dire si $\delta_n \leq {\delta_0}^{2^n} \leq \left(\dfrac{M}{4}\right)^{2^n}$, alors

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n^2 \leq \left({\delta_0}^{2^n}\right)^2 = {\delta_0}^{2^{n+1}} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^{n+1}}$$

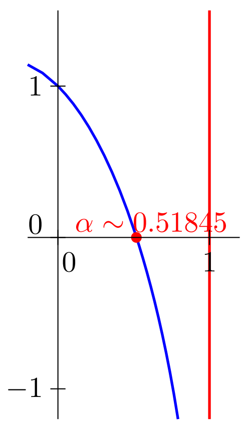
Elle est donc vraie au rang suivant $n + 1$.

6. Pour tout entier naturel n on a les implications suivantes :

$$x_n - \alpha \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{2}{M}\delta_n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \delta_n \leq \frac{M}{2 \times 10^5} \Leftarrow \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n} \leq \frac{M}{2 \times 10^5} \Leftrightarrow 2^n \ln\frac{M}{4} \leq \ln\frac{M}{2 \times 10^5}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq \frac{\ln(M/2 \times 10^5)}{\ln(M/4)} \text{ car } M/4 < 1 \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{\ln M/2 \times 10^5)}{\ln M - \ln 4}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln 2} \quad \ln\left(\frac{\ln M - \ln(2 \times 10^5)}{\ln M - \ln 4}\right) \sim 5.4949$$



On peut prendre $n = 6$