LE PRODUIT SCALAIRE EN SECONDE

IREMPT : ÉQUIPE DE GÉOMÉTRIE

1. Prérequis

Mesure algébrique, théorème de Pythagore, projection orthogonale, symétrie orthogonale, angle géométrique, angle de deux vecteurs, cercle trigonométrique.

2. Préliminaires.

2.1. **Formule d'Alkashi.**

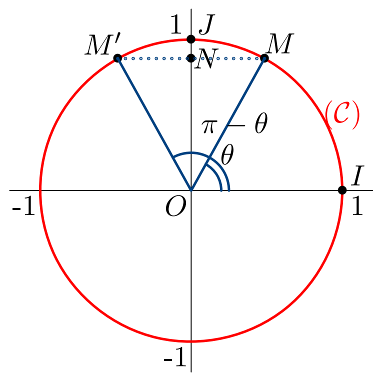
On établit d'abord le théorème suivant qu'on utilisera pour la démonstration de la formule d'Alkashi.

Théorème 2.1. *Pour tout θ appartenant à* $[0,\pi]$,

$$\begin{array}{rcl}\cos(\pi-\theta) & = & -\cos\theta \\ \sin(\pi-\theta) & = & \sin\theta\end{array}$$

$\square$

Démonstration.



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et I' le symétrique de I par rapport à l'axe (OJ). Soit M un point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{IOM}=\theta$.
La symétrie orthogonale conservant les distances et les mesures des angles géométriques, on a : $OM'=OM$ et $\widehat{IOM}=\widehat{I'OM'}$.
Donc M' appartient au cercle $\mathcal{C}$ et $\widehat{I'OM'}=\theta$.

On en déduit que $\widehat{IOM'}=\pi-\theta$.

Le point M a pour coordonnées $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ et M' a pour coordonnées $\big(\cos(\pi-\theta),\ \sin(\pi-\theta)\big)$. Les droites (OJ) et (MM') se coupent au point N, milieu de $[MM']$.

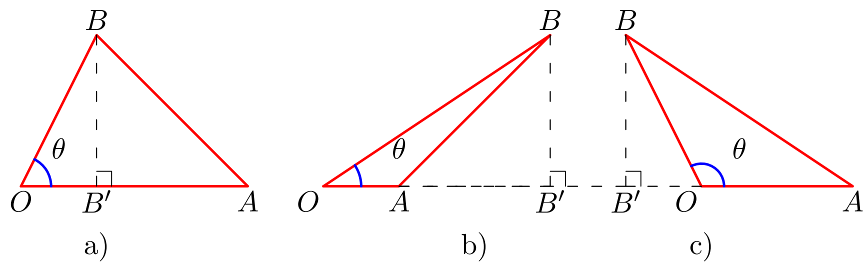
L'abscisse
$$x_N = \frac{1}{2}(x_M + x_{M'}) = \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos(\pi-\theta))$$
de N est nulle car N appartient à l'axe des ordonnées. D'où $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$.

Les points M et M' ont la même ordonnée car ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc
$$\sin\theta = y_M = y_{M'} = \sin(\pi-\theta)$$

□

Théorème d'Alkashi. *Soient O, A et B trois points du plan. On a :*

$$\boxed{AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB\cos(\widehat{AOB})} \tag{2.1}$$



Remarque. *La formule 2.1 est encore appelée théorème de Pythagore généralisée.*
□

Démonstration. La relation est évidente si les trois points sont alignés.

Sinon, on pose $\theta = \widehat{AOB}$.

1) $\widehat{AOB}$ est aigu.

Soit B' le projeté orthogonal de B sur (OA). En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $AB'B$, on obtient :
$$AB^2 = AB'^2 + BB'^2$$
$$AB' = OA - OB' \text{ (figure2.1}(a)) \quad \text{ou} \quad AB' = OB' - OA \text{ (figure(2.1}b))$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } AB' &= |OA - OB'| \\
OB' &= OB\cos\theta \\
BB' &= OB\sin\theta \\
AB^2 &= \Big|OA - OB\cos\theta\Big|^2 + OB^2\sin^2\theta \\
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos\theta
\end{aligned}$$

2) $\widehat{AOB}$ est obtus.

Soit B' le projeté orthogonal de B sur (OA). En appliquant le théoréme de Pythagore au triangle rectangle $AB'B$,(figure 2.1c) on obtient :

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AB'^2 + BB'^2 \\
AB' &= OA + OB' \\
OB' &= OB\cos(\pi-\theta) = -OB\cos\theta \\
BB' &= OB\sin(\pi-\theta) = OB\sin\theta \\
AB^2 &= (OA - OB\cos\theta)^2 + OB^2\sin^2\theta \\
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos\theta
\end{aligned}$$

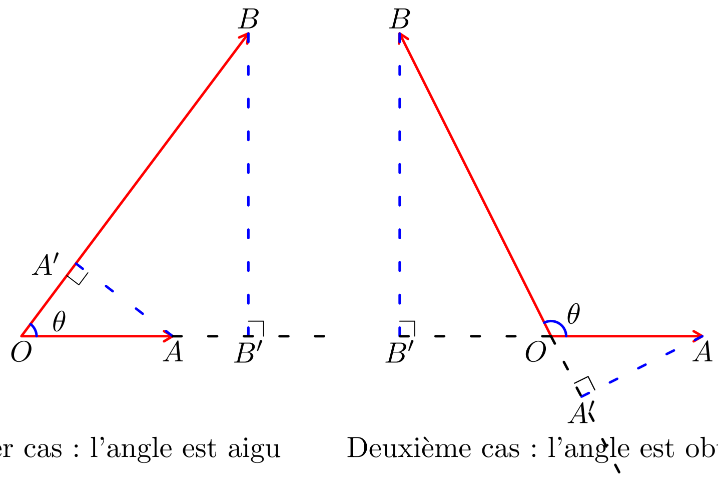
Finalement on a : $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos(\widehat{AOB})$ □

2.2. **Activité.**

Soient O, A et B trois points non alignés du plan, A' et B' les projetés orthogonaux de A et B respectivement sur les droites (OB) et (OA). L'objectif de cette activité est de montrer que :

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OA'} \times \overline{OB} = OA \times OB\cos(\widehat{AOB}).$$

Désignons par θ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$



Premier cas : l'angle est aigu Deuxième cas : l'angle est obtus

Premier cas : l'angle θ est aigu.

Puisque l'angle θ est aigu, les points A et B' se trouvent sur une même demi-droite d'origine O. Il en est de même des points B et A'. Donc

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = OA \times OB'$$
$$\overline{OB} \times \overline{OA'} = OB \times OA'$$

Le triangle OBB' étant rectangle en B', $OB' = OB \cos\theta$:

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = OA \times OB \cos\theta$$

Le triangle OAA' étant rectangle en A', $OA' = OA \cos\theta$:

$$\overline{OB} \times \overline{OA'} = OB \times OA \cos\theta$$

On en déduit que

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OB} \times \overline{OA'} = OA \times OB \cos\theta \tag{2.2}$$

Deuxième cas : l'angle θ est obtus.

Puisque l'angle θ est obtus, les points A et B' se trouvent sur deux demi-droites opposées d'origine O. Il en est de méme des points B et A'. Donc

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = -OA \times OB'$$

$$\overline{OB} \times \overline{OA'} = -OB \times OA'$$

Le triangle OBB' étant rectangle en B'

$$OB' = OB\cos(\pi - \theta)$$

Le triangle OAA' étant rectangle en A',

$$OA' = OA\cos(\pi - \theta)$$

Et comme $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, on obtient :

$$OB' = -OB\cos\theta \text{ et } OA' = -OA\cos\theta$$

ensuite

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = OA \times OB\cos\theta$$

$$\overline{OB} \times \overline{OA'} = OB \times OA\cos\theta$$

On en déduit que

$$\overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OB} \times \overline{OA'} = OA \times OB\cos\theta$$

Exercice 1. Montrer que l'égalité $\overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OB} \times \overline{OA'}$ est vraie si O, A et B sont alignés.

3. Produit scalaire de deux vecteurs

3.1. **Définition.**

Définition 3.1.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On considère trois points O, A et B tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}.$$

- Si aucun des vecteurs n'est nul, le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est **le nombre réel** noté $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ tel que

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overline{OA} \times \overline{OB'}$$

où le point B' est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

- Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est égal à zéro : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0$.

Remarque. *On voit que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est bien un nombre réel.* □

3.2. **Norme d'un vecteur.**

Le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \overline{OA} \times \overline{OA} = OA^2$ est un nombre positif.

Définition 3.2. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif $\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$ notée $||\overrightarrow{u}||$

Propriétés (De la norme)**.**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, α un réel.
i) $||\overrightarrow{u}|| = 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u} = 0$.
ii) $||\alpha\overrightarrow{u}|| = |\alpha| \times ||\overrightarrow{u}||$
iii) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$.

Démonstration. Voir sous-section 3.3 □

3.3. **Propriétés du produit scalaire.**

3.3.1. *Propriétés caractéristiques.*

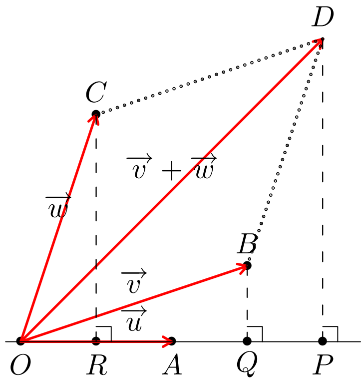
Propriétés. *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et α un nombre réel. Les relations suivantes sont toujours vérifiées.*
i) $\overrightarrow{u}^2 = 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
ii) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
iii)
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\overrightarrow{w} \\ (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\overrightarrow{u} \end{aligned}$$
iv) $\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

Démonstration.
i) $\overrightarrow{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OA} = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
ii) Voir l'activité 2.
La propriété ii) signifie que le produit scalaire est symétrique.
Ainsi au lieu de parler du produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$, on dira simplement produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
iii) • Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{0}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = 0 = \overrightarrow{0}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}.\overrightarrow{w}$
• Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, soient O, A, B, C et D les points tels que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OD}$$

Désignons par P, Q et R les projetés orthogonaux respectifs de D, B et C sur la droite (OA).

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = \overline{OA}\times\overline{OP} =$$
$$\overline{OA}\times(\overline{OQ}+\overline{QP}) = \overline{OA}\times\overline{OQ}+\overline{OA}\times\overline{QP} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

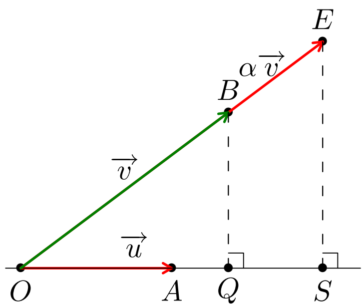


La deuxième partie de iii) se démontre de la même manière.

iv) Soit E le point du plan tel que $\alpha\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OE}$ et S le projeté orthogonal de E sur la droite (OA).

Alors, puisque $\overrightarrow{OE} = \alpha\overrightarrow{OB}$, on a $\overline{OS} = \alpha\overline{OQ}$ d'après le théorème de Thalès.

$$\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE} = \overline{OA}\times\overline{OS} = \overline{OA}\times(\alpha\times\overline{OQ}) = \alpha\times(\overline{OA}\times\overline{OQ}) = \alpha\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$$



□

3.3.2. *Identités et inégalités remarquables.*

(1) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(2) $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

(3) $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|$.

Dans cette formule, on a l'égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

(4) $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| \leq \| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \|$

Démonstration. (1) et (2) Il suffit de développer.

(3) Si l'un des vecteurs est nul, c'est évident.

Si aucun des vecteurs n'est nul, $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \, |\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \leq \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$. car $|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \leq 1$.

De plus, $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$ si et seulement si $|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = 1$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

(4) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Comme $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$, on a $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 \leq ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$, c'est-à-dire $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 \leq \Big(||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||\Big)^2$. D'où $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$. □

Exercice 2. En utilisant le polynôme en α : $P(\alpha) = (\alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$ retrouver la relation $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|$.

3.4. **Différentes expressions du produit scalaire.** La formule donnée dans la définition 3.1 est appelée expression algébrique du produit scalaire.

3.4.1. *Expression trigonométrique du produit scalaire.*

Dans le cas où aucun des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'est nul, la formule (2.2) de l'activité 2.2 montre que l'on a encore :

$$\overrightarrow{u}.\ \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \cos\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \tag{3.1}$$

La formule (3.1) est appelée expression trigonométrique du produit scalaire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

3.4.2. *Expression métrique du produit scalaire.*

Soient trois points O, A et B non alignés. D'après le théorème de Pythagore généralisé :

$$OA \times OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\Big(OA^2 + OB^2 - AB^2\Big)$$
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\Big(OA^2 + OB^2 - AB^2\Big)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\Big(\| \overrightarrow{OA} \|^2 + \| \overrightarrow{OB} \|^2 - \| \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \|^2 \Big)}$$

En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big(\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \|^2 \Big)} \tag{3.2}$$

on a aussi

$$\boxed{\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big(\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 \Big)} \tag{3.3}$$

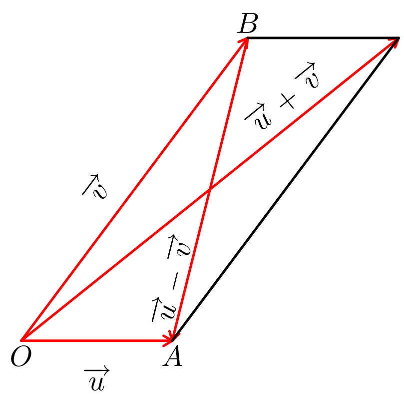
En effet, la relation $(\alpha\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ devient, lorsqu'on remplace α par -1 :

$$(-\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}).$$

Alors en remplaąnt $\overrightarrow{u}$ par $-\overrightarrow{u}$ dans la formule (3.2), on obtient 3.3.

Remarque. *Les formules 3.2 et 3.3 qui sont encore valables lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, sont appelées expressions métriques du produit scalaire ou formules du parallélogramme.*

Elles montrent que la connaissance des longueurs des vecteurs détermine le produit scalaire. □



3.4.3. *Expression analytique du produit scalaire.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$. Alors

$$||\overrightarrow{u}||^2 = x^2+y^2,\ ||\overrightarrow{v}||^2 = x'^2+y'^2,\ ||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}||^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2$$

et (3.2) montre que :

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x'-x)^2 - (y'-y)^2\Big) = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy')$$

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{v} = xx' + yy'} \tag{3.4}$$

La formule (3.4) est appelée expression analytique du produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé.

Jointe à l'expression trigonométrique (3.1) du produit scalaire elle permet d'établir certaines formules trigonométriques parmi les plus usitées.

Application 1. *Soient p et q deux éléments de $]-\pi,\ \pi]$. On a :*

(1) $\cos(p-q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q$
(2) $\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q$
(3) $\sin(p+q) = \sin p \cos q + \sin q \cos p$
(4) $\sin(p-q) = \sin p \cos q - \sin q \cos p$

Démonstration. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs unitaires tels que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = p$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}) = q$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(\cos p, \sin p)$ et $(\cos q, \sin q)$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = p - q$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{v}|| \times ||\overrightarrow{u}|| \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \cos(p-q)$.

On a aussi $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \cos p \cos q + \sin p \sin q$.

D'où $\cos p \cos q + \sin p \sin q = \cos(p-q)$.

La démonstration des autres formules est laissée en exercice. □

4. Orthogonalité et produit scalaire

Définition 4.1. On dira que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, O, A, B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont alors des vecteurs directeurs respectifs des droites (OA) et (OB).
Commme $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \cos(\widehat{AOB})$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB \cos(\widehat{AOB})$.

Donc, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\cos(\widehat{AOB}) = 0$ ce qui signifie que les deux droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

5. Applications

5.1. **Caractérisation d'objets géométriques.**

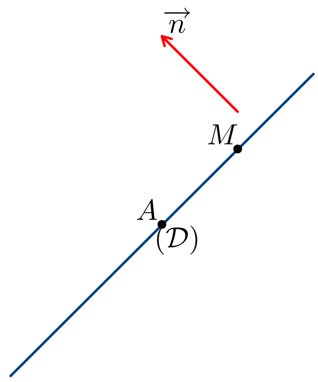
5.1.1. *Droites.* Etant donnée une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Définition 5.1. Un vecteur normal à une droite est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite

Remarque. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. Donc si un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite $(\mathcal{D})$, l'ensemble des vecteurs normaux à $(\mathcal{D})$ est l'ensemble $\left\{\alpha\overrightarrow{n}, \alpha \in \mathbb{R}^*\right\}$ des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{n}$* □

Théorème 5.1 (Caractérisation d'une droite par un point et une normale)**.**
Soit $(\mathcal{D})$ une droite, A un point de $(\mathcal{D})$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{D})$.

La droite $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ c'est-à-dire $M \in (\mathcal{D})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$



□

Démonstration.

Soit M un point de $\mathcal{D}$. Montrons que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

- Si $M = A$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

- Si M est différent de A, $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Réciproquement, soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. Montrons que M appartient à $(\mathcal{D})$.

- Si $M = A$, alors M appartient à $(\mathcal{D})$.

- Si M est différent de A, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de la droite (AM).

La relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ entraîne que $\overrightarrow{n}$ est normal à (AM).

Comme $\overrightarrow{n}$ est aussi normal à $(\mathcal{D})$, alors les droites $(\mathcal{D})$ et (AM) sont parallèles. Puisqu'elles ont le point A en commun, alors elles sont confondues, donc $(AM) = (\mathcal{D})$. D'où M appartient à $(\mathcal{D})$.

□

Théorème 5.2 (Equation cartésienne d'une droite caractérisée par un point et un vecteur normal)**.**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Soit la droite passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$. Alors une équation cartésienne de $(\mathcal{D})$ est $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

2. Si une droite $(\mathcal{D})$ a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b)$ est normal à $(\mathcal{D})$. □

Remarque. *Si* $\overrightarrow{n}(a, b)$ *est un vecteur unitaire, l'équation* $ax + by + c = 0$ *est appelée* équation normalisée de la droite $(\mathcal{D})$.

En désignant par H*, le projeté orthogonal de* O *sur* $(\mathcal{D})$*, on a pour tout point* M *de* $(\mathcal{D})$ *:* $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{n} = ax + by = -c$

Cette écriture montre que le réel $-c$ *est l'abscisse de* H *dans l'axe* $(O, \overrightarrow{n})$ □

Théorème 5.3 (Caractérisation de la médiatrice d'un segment)**.**

Soient A *et* B *deux points distincts du plan et* I *le milieu du segment* $[AB]$*. La médiatrice du segment* $[AB]$ *est l'ensemble des points* M *du plan tels que* $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$*, c'est-à-dire la droite passant par* I *et de vecteur normal* $\overrightarrow{AB}$*.* □

Démonstration. Par définition, un point M du plan appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AM = MB$

$$\begin{aligned} AM = MB &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad (\text{car } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}) \end{aligned}$$

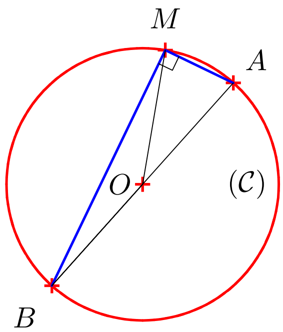
□

5.1.2. *Cercles.*

Théorème 5.4. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[A\ B]$. Un point M du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.* □

Démonstration. Soit O le centre du cercle. Un point M du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $OM^2 = OA^2$.

$$\begin{aligned} OM^2 = OA^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OM}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OM}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BO}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \end{aligned}$$

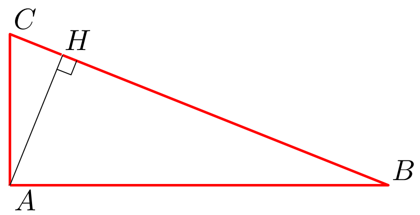


□

Remarque. *Soient A et B deux points du plan, M un point distinct de A et de B. L'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est droit si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.* □

5.1.3. *Triangle rectangle.*

Théorème 5.5. *Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$* □



Démonstration. $\overline{BC}.\overline{BH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}$.
Puisque $[AH]$ est une hauteur du triangle ABC, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$.
Donc $\overline{BC}.\overline{BH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BA}$
Finalement $\overline{BC}.\overline{BH} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$

Donc $\overline{BC}.\overline{BH} = \overrightarrow{BA}^2$ si et seulement si $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A. □

Remarque. *Dans le théorème (5.5), on peut intervertir les rôles des points B et C : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AC^2 = \overline{CB}.\overline{CH}$.* □

Théorème 5.6. *Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$* □

Démonstration. On a : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC})^2$ et en développant :

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HC}^2 + 2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$

Puisque les deux triangles BHA et CAH sont rectangles en H, on a d'après le théorème de Pythagore :

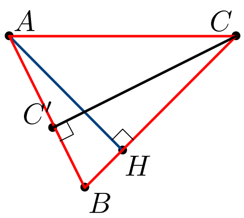
$BH^2 = AB^2 - AH^2$ et $CH^2 = AC^2 - AH^2$, c'est-à-dire
$\overrightarrow{BH}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AH}^2$ et $\overrightarrow{CH}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AH}^2$.
Donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AH}^2) + (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AH}^2) + 2\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$
$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2(\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC})$

Or le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$.

Donc le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} = 0$, c'est-à-dire $AH^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$, soit encore $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$ □

Théorème 5.7. *Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AH \times BC = AB \times AC$ (Autrement dit, $2\times$ aire de $ABC = AB \times AC$.)* □

Démonstration.



Soit C' le projété orthogonal de C sur (AB).

Puisque les triangles ABH et BCC' sont rectangles respectivement en H et C', $AH = AB\sin(\widehat{ABH}) = AB\sin(\widehat{ABC})$ et $CC' = BC\sin\widehat{ABC}$.

$$\begin{aligned} AH.BC = AB.AC &\Leftrightarrow AB.BC\sin(\widehat{ABH}) = AB.AC \\ &\Leftrightarrow BC\sin(\widehat{ABH}) = AC \\ &\Leftrightarrow BC\sin(\widehat{ABC}) = AC \\ &\Leftrightarrow CC' = AC \end{aligned}$$

Cette dernière relation est équivalente à $A = C'$. En effet si A et C' n'étaient pas confondues, C appartiendrait à la médiatrice de (AC'), on aurait alors deux perpendiculaires à (AB) issues de C.

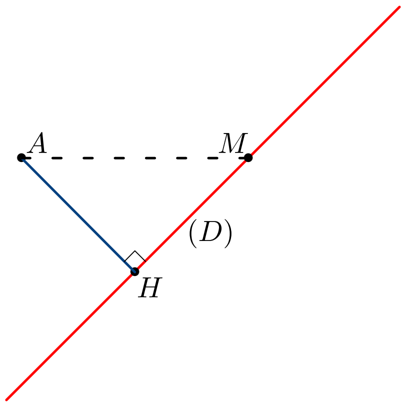
□

5.2. **Distance d'un point à une droite.**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Si M est un point quelconque de $(\mathcal{D})$, $AM^2 = AH^2 + HM^2$; donc $AM^2 \geq AH^2$ c'est-à-dire $AM \geq AH$.

Ainsi la distance AH est le minimum des distances de A aux points de $(\mathcal{D})$.



D'où la définition suivante.

Définition 5.2. Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Le nombre réel AH est appelé la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$; on le notera $d(A,(\mathcal{D}))$.

Théorème 5.8. *Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. Soient $(\mathcal{D})$ une droite d'équation $ax+by+c=0$ et A un point de coordonnées (x_A, y_A).*

Alors $\boxed{d(A,(\mathcal{D})) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. □

Démonstration.

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ est normal à $(\mathcal{D})$

Puisque H appartient à $(\mathcal{D})$, on a : $ax_H+by_H+c=0$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{OH}\overrightarrow{n}$$
$$= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c.$$
$$|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}| = |-ax_A - by_A - c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| \, |\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n})| = |ax_A+by_A+c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| = |ax_A+by_A+c|.$$
$$AH = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\| \overrightarrow{n} \|}.$$
$$AH = d(A,(\mathcal{D})) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

Remarque. *Lorsque le vecteur* $\overrightarrow{n}(a,b)$ *est unitaire, alors*
$\boxed{AH = d(A,(\mathcal{D})) = |ax_A + by_A + c|}$. □

Remarque.
Soit $(\mathcal{D})$ *une droite du plan de vecteur normal unitaire* $\overrightarrow{n}$, *et* A *un point du plan.*
Le réel

$$p_{\mathcal{D}}(A) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$$

est indépendant du choix de M ***sur la droite*** $(\mathcal{D})$.
En effet si H *est la projeté orthogonal de* A *sur* $(\mathcal{D})$, *on a :*
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}$.
On en déduit en outre, que $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = AH$ *est la distance de* A *à* $(\mathcal{D})$. □

5.3. **Bissectrices d'un angle.**

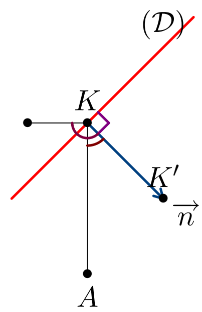
5.3.1. *Position d'un point par rapport à une droite.*

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, et A un point du plan. Fixons un point K sur la droite et soit K' l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{KK'}$.

La droite $(\mathcal{D})$ partage le plan en deux demi-plans ne contenant pas $(\mathcal{D})$.
Le demi-plan (P_1) contenant le point K' et le demi-plan (P_2) ne contenant pas K'.

D'après la remarque (5.2), le réel $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{n}$ ne dépend que du point A. De plus

- $A \in (\mathcal{D}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} = 0$
- $A \in P_1 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{n})}$ est aigu
  $\Leftrightarrow \quad \cos(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{n}) > 0$
  $\Leftrightarrow \quad KA||\overrightarrow{n}||\cos(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{n}) > 0$
  $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} > 0$
- $A \in P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{n})}$ est obtus
  $\Leftrightarrow \quad \cos(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{n}) < 0$
  $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} < 0$.



En conclusion,

- $A \in (\mathcal{D}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} = 0$
- $A \in P_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} > 0$
- $A \in P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} < 0$

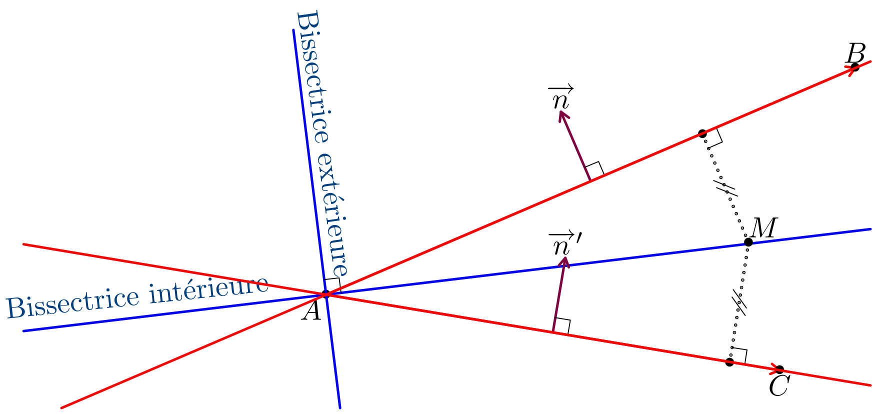
Lemme 5.1. *Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul, K un point du plan et $(\mathcal{D})$ la droite passant par K et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.*

Deux points A et B du plan appartiennent à un même demi-plan de frontière $(\mathcal{D})$ si et seulement si $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{n}$ sont de même signe, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{n} > 0$ □

5.3.2. *Caractérisation des bissectrices d'un angle.*

Soient A, B et C trois points non alignés. On veut déterminer les bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$.

Soient $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs unitaires et normaux respectivement aux droites (AB) et (AC).



Cherchons l'ensemble $\mathcal{B}$ des points M tels que $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$.

$$\begin{aligned}
d(M,(AB)) = d(M,(AC)) &\Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'}| \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} & = & \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'} \\ & \text{ou} & \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} & = & -\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'} & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'} & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{n} - \overrightarrow{n'}) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{n} + \overrightarrow{n'}) & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc la réunion des droites Δ_1 et Δ_2 passant par A et de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} + \overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{n} - \overrightarrow{n'}$.

On va déterminer la position de B et C par rapport à ces duex droites.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{n} + \overrightarrow{n'}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'}$

De même, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{v'-} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}$.

Par conséquent $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'}).(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n})$.

Le signe de $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{v})$ est celui de $p = (\dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}.\overrightarrow{n'}).(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||}.\overrightarrow{n})$

Considérons un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note (a, b) et (a', b') les coordonnées des vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AC} \|}$.

En prenant pour $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ les vecteurs de coordonnées respectives $(-b, a)$ et $(-b', a')$, on a :

$$p = (-ab' + ba')(-a'b + b'a) = -(-ab' + ba')^2$$

Ainsi $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{v})$ est strictement négatif. D'après le lemme (5.1) B et C sont dans deux demi-plans distincts de frontière Δ_1. On montre de même que $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v'}).(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{v'})$ est strictement positif. Donc B et C sont dans un même demi-plan de frontière Δ_2.

La droite Δ_1 est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et Δ_2 est sa bissectrice extérieure.

D'où :

Théorème 5.9. *Soient A, B et C trois points non alignés du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$ est la réunion des deux bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$.*

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère. Notons (a, b) et (a', b') les coordonnées respectives des vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AC} \|}$. Soient $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ les vecteurs unitaires de coordonnées respectives $(-b, a)$ et $(-b', a')$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n} + \overrightarrow{n'}$.

La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n} - \overrightarrow{n'}$. □

Exercice 3. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, \sqrt{3})$ et $(1, 0)$ Déterminer une équation de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BOC}$ et une équation de la bissectrice extérieure.

Remarque.
Les bissectrices (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires : $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{n}^2 - \overrightarrow{n'}^2 = 1 - 1 = 0.$
□

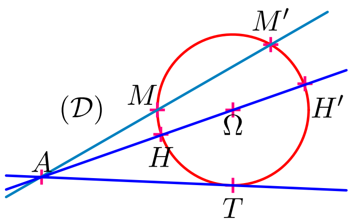
5.4. **Puissance d'un point par rapport à un cercle.**

Théorème 5.10.
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle du plan, de rayon $r > 0$ et de centre Ω. Soit A un point du plan. Si une droite $(\mathcal{D})$ passant par A coupe le cercle en deux points M et M' (éventuellement confondus), alors

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = A\Omega^2 - r^2.$$

En particulier :

- *Si $(\mathcal{D})$ passe par Ω, elle coupe le cercle en deux points H et H' diamétralement opposés, alors $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH'} = A\Omega^2 - r^2$.*
- *Si $(\mathcal{D})$ est une tangente à $(\mathcal{C})$ passant par A et en notant T le point de contact, alors $\overrightarrow{AT}^2 = A\Omega^2 - r^2$.*



□

Démonstration. Désignons par M_1 le symétrique de M par rapport à Ω.

D'après le théorème (5.4) de caractérisation du cercle (page 12) on a :

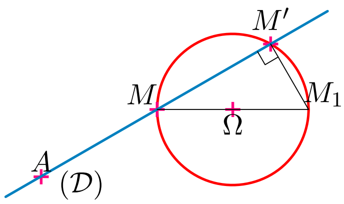
$$\overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{M'M_1} = 0.$$

Puisque les points A, M et M' sont alignés, on a :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{M'M_1} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{M'M_1} \\
&= \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M_1}) \\
&= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1} \\
&= (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}).(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M_1}) \\
&= (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}).(\overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M}) \\
&= A\Omega^2 - r^2
\end{aligned}$$



□

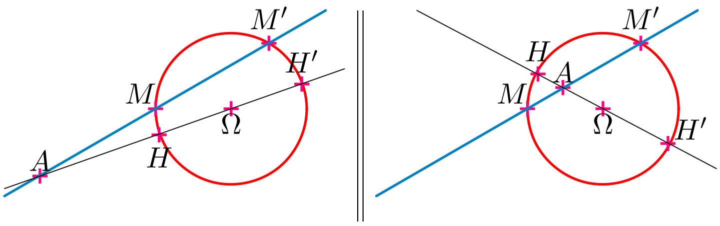
Remarque. *Le théorème ci-dessus montre que, étant donné un point A et un cercle $\mathcal{C}$, le nombre réel $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}$, qui est égal à $A\Omega^2 - r^2$,* ***ne dépend pas des points M et M' de $\mathcal{C}$ tels que A, M et M' sont alignés****. Ce qui motive la définition suivante.* □

Définition 5.3. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle du plan, de rayon $r > 0$ et de centre Ω. Soit A un point du plan. On appelle puissance [1] du point A par rapport à $(\mathcal{C})$ le réel $p_{\mathcal{C}}(A) = A\Omega^2 - r^2$.

[1] La notion de puissance d'un point par rapport à un cercle n'est pas au programme, mais nous l'avons traitée comme une application directe du produit scalaire

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon r et A un point du plan. Une droite passant par A et Ω coupe le cercle en deux points H et H'.

Montrer que le plus petit des nombres AH et AH' réalise le minimum des distances de A aux points du cercle $(\mathcal{C})$ et le plus grand de ces nombres réalise le maximum des distances de A aux points du cercle $(\mathcal{C})$.



Remarque. *Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle* $(\mathcal{C})$ *d'équation* $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 - r^2 = 0$ *de centre* Ω *et de rayon* r*. Soit* A *un point quelconque du plan. La relation* $p_\mathcal{C}(A) = A\Omega^2 - r^2$ *se traduit par :* $p_\mathcal{C}(A) = (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 - r^2$. □

La puissance d'un point A par rapport à un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r permet de déterminer la position de ce point par rapport au cercle.

Le cercle partage le plan en dux régions ne contenant pas $(\mathcal{C})$.

Une région R_1 contenant le centre Ω de $(\mathcal{C})$ (le disque de centre Ω et de rayon r) et une rayon R_2 ne contenant pas Ω.

D'après le théorème (5.10), $p_\mathcal{C}(A)$ ne dépend que du point A. De plus

- $A \in (\mathcal{C}) \quad \Leftrightarrow \quad A\Omega = r \quad \Leftrightarrow \quad p_\mathcal{C}(A) = 0$
- $A \in R_1 \quad \Leftrightarrow \quad A\Omega < r \quad \Leftrightarrow \quad p_\mathcal{C}(A) < 0$
- $A \in R_1 \quad \Leftrightarrow \quad A\Omega > r \quad \Leftrightarrow \quad p_\mathcal{C}(A) > 0$

Si en outre le plan est muni d'un repère orthonormé ; le cercle $(\mathcal{C})$ a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 - r^2$. Alors,

$$p_\mathcal{C}(A) = A\Omega^2 - r^2 = (x_A - x_\Omega) + (y_A - y_\Omega) - r^2$$

Les conditions précédentes se traduisent donc en coordonnées par :

- $A \in (\mathcal{C}) \quad \Leftrightarrow \quad (x_A - x_\Omega) + (y_A - y_\Omega) - r^2 = 0$
- $A \in R_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_A - x_\Omega) + (y_A - y_\Omega) - r^2 > 0$
- $A \in R_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_A - x_\Omega) + (y_A - y_\Omega) - r^2 < 0$

Exercice 5. Soient B, C, D et E quatre points deux à deux distincts tels que les droites (BC) et (DE) soient sécantes en un point A. Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$$

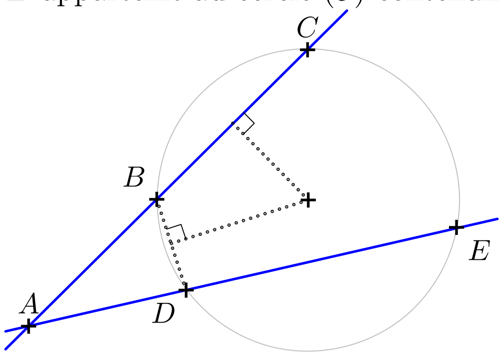
Correction.

• Si les quatre points B, C, D et E sont sur un même cercle, les réels $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ représentent chacun la puissance de A par rapport à ce cercle ; ils sont donc égaux.

• Réciproquement, supposons que les points vérifient

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$$

et montrons que B, C, D et E sont cocycliques. Pour cela, il suffit de montrer que E appartient au cercle $(\mathcal{C})$ contenant B, C et D.



Remarquons d'abord que l'hypothèse entraîne que les points A et D sont différents. En effet, s'ils étaient confondus, on en déduirait $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. Comme A, B et C sont alignés, A serait confondu soit avec B, soit avec C, ce qui contredit le fait les points B, D et C sont distincts deux à deux.

La droite (AD) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point E'.

Puisque E' appartient à la droite (AD), il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{E'E} = \lambda\overrightarrow{AD}$

Alors $p_{\mathcal{C}}(A) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE'}$ et l'hypothèse entraîne que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE'}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE'} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE'}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{E'E} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\lambda\ \overrightarrow{AD} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\ \overrightarrow{AD}^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow E = E'
\end{aligned}$$

Donc $E = E'$ appartient à $\mathcal{C}$.

6. Exercices

Exercice 1. On considère deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ dont les supports sont perpendiculaires. Soit I un point de $[Ax)$ et J un point de $[Ay)$.

1. Construire le point K de $[Ax)$ tel que $AK = AJ$ et le point L de $[Ay)$ tel que $AL = AI$.

2. Construire le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$.

Exercice 2. Soit PQR un triangle, I son orthocentre, P', Q' et R' les projetés orthogonaux respectifs de I sur les droites (QR), (RP) et (PQ).

1. Démontrer que $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{PR} = 0$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PR}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overline{IP} \times \overline{IP'} = \overline{IQ} \times \overline{IQ'}$.

4. Calculer de deux manières différentes chacun des produits scalaires $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IR}$ et $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ}$

En déduire les égalités $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IP}$.

Exercice 3.

1. Soit $IJKL$ quatre points du plan.
Etablir la relation : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{IL}.\overrightarrow{JK} = 0$.

2. Dans cette question, on suppose que L appartient à la hauteur du triangle IJK issue de I. Etablir l'égalité $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{LJ}$

Exercice 4.

1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même norme.

2 (Application)**.**

a) Soit PQR un triangle isocèle en P.

Etablir que $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$ est orthogonal à $\overrightarrow{QR}$

b) Soit IJK un triangle quelconque. Construire un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de $\widehat{IJK}$

Exercice 5. Soient P et Q deux points du plan et I le milieu du segment $[PQ]$.

1. Démontrer que pour tout point M du plan on a l'égalité :

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = MI^2 - \frac{1}{4}PQ^2$$

2. Soit k un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = k$$

Exercice 6. Soit (D) une droite et I un point n'appartenant pas à (D) ; on désigne par H le projeté orthogonal de I sur (D). Démontrer que pour tout point M de (D) on a : $IM \geq IH$.

Exercice 7. Soit IJK un triangle rectangle en I et H le projeté orthogonal de I sur (JK).

Utiliser le theorème 5.5 pour démontrer que le point M est le barycentre du système de points pondérés $\{(J,\ IK^2);\ (K,\ IJ^2)\}$.

Exercice 8. Soit $[Ix)$ et $[Iy)$ deux demi-droites de même origine. On désigne par α la mesure en radians de l'angle $\widehat{xIy}$.

Soit J le point de $[Ix)$ tel que $IJ = 2$ et K le point de $[Iy)$ tel que $IK = \dfrac{4}{3}$. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ dans chacun des cas suivants :

$$\alpha = \frac{\pi}{6},\ \alpha = \frac{\pi}{4},\ \alpha = \frac{\pi}{3},\ \alpha = \frac{5\pi}{6},\ \alpha = \frac{2\pi}{3},\ \alpha = \frac{3\pi}{4},\ \alpha = \pi$$

Utiliser le theorème 5.5 pour démontrer que le point M est le barycentre du système de points pondérés $\{(J,\ IK^2);\ (K,\ IJ^2)\}$.

Exercice 9. Soit IJK un triangle équilatérale. On considère les points P, Q et R appartenant respectivement aux segments $[IJ]$, $[KJ]$ et $[IK]$ et tels que : $IP = JQ = KR = \frac{1}{3}IJ$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{PR}$.

2. Déterminer de même les produits scalaires $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{QR}$.

3. Calculer les distances PQ, QR et RP.

4. Quelle est la nature du triangle PQR?

Exercice 10. Soit IJJ' un triangle. On construit le carré $IJKL$ tel que les points K et L n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (IJ) contenant le point J' et le carré $IJ'K'L$ tel que les points K' et L' n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (IJ') contenant le point J.

1. Soit α la mesure en radians de l'angle $\widehat{JIJ'}$ et β la mesure en radians de l'angle $\widehat{LIL'}$.

Démontrer que l'on a : $\beta = \pi - \alpha$.

2. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}$ et $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL'}$.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JL'}.\overrightarrow{J'L}$.

Qu'en déduire pour les droites (JL') et $(J'L)$?

Exercice 11. Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$ de côté unité.

inputhexagone.tex

Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{FC},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{ED}$$

Pour tous les exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 12. Soit le vecteur $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.

1. Déterminer un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{v}$.

2. Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{v}$.

Exercice 13. Mêmes exrcices que le précédent pour les vecteurs suivants :
$$\overrightarrow{v} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{4}\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(4a,\ 3a)$ est unitaire.

Exercice 15. Mêmes exrcices que le précédent avec $\overrightarrow{u} = (a+1)\overrightarrow{i} + (a+1)\overrightarrow{j}$.

Exercice 16. On considère un réel a et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées recpectives sont : $(a+1, a)$ et $(a-1, 2a)$.

1. Déterminer l'ensemble E des réels a pour lesquels $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ pour chacun des réels de l'ensemble E.

Exercice 17. On considère un réel a et les points $I,\ J$ et K dont les coordonnées recpectives sont : $(1, 2),\ (3, a)$ et $(9, -3)$. Déterminer l'ensemble E des réels a pour lesquels le triangle IJK est rectangle en I.

Exercice 18. Soit x un réel, $I,\ J$ et K les points dont les coordonnées sont $(1, -2),\ (0, x+3)$ et $(6, -1)$.

1. Déterminer l'ensemble E des réels x pour lesquels le triangle IJK est rectangle en I.

2. Démontrer que si x appartient à E, le triangle IJK est alors isocèle.

Exercice 19. Soit I le point de coordonnées $(-1, 1)$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(1, -2)$.

Montrer que l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{v} = 0$. est une droite dont on donnera un repère cartésien.

Exercice 20.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{j}$ est unitaire.

2. Déterminer un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Exercice 21. Soient I, J, K et L quatre points de coordonnées respectives :

$$(-1,\ 1);\ (\frac{5}{2},\ 4);\ (-2,\ 3);\ (-\frac{11}{2},\ 0)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{JL}$, $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$.

2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{LJ}$ et $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{JK}$.

3. Soit M le point défini par $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{KL}$. On désigne par α la mesure en radians de l'angle $\widehat{JIM}$. Déterminer le réel $\cos\alpha$ et en déduire α.

4. Que dire des droites (IK) et (JL)

Exercice 22.

1. Construire la droite (D) d'équation : $x + y + 1 = 0$.

2. Calculer la distance du point A de coordonnées $(-2,\ 1)$ à la droite (D).

Exercice 23. Mêmes exercices que le précédent pour les droites (D) et le point A suivants :
$(D) : 2x - y + 3 = 0,\ A(2, -1)$.
$(D) : \frac{1}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,\ A(-1, 2)$.

Exercice 24.

1. Construire les droites (D), (D') et (D'') d'équations respectives : $3x+4y-1 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$ et $3x - 4y - 1 = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des points I du plan tels que : $d(I, (D)) = d(I, (D'))$

3. Déterminer l'ensemble des points I du plan tels que : $d(I, (D)) = d(I, (D''))$

Exercice 25. Soient A, B et C trois points du plan tels que $AB = 2$, $BC = 5$ et $AC = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Exercice 26. Soient p et q deux éléments de $]-\pi,\ \pi]$. On a :

$$\begin{array}{ll}(1) & \cos(p-q)=\cos p\cos q+\sin p\sin q\\ (2) & \cos(p+q)=\cos p\cos q-\sin p\sin q\\ (3) & \sin(p+q)=\sin p\cos q+\sin q\cos p\\ (4) & \sin(p-q)=\sin p\cos q-\sin q\cos p\end{array}$$

Démonstration. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs unitaires tels que $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u})=p$ et $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{v})=q$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(\cos p,\sin p)$ et $(\cos q,\sin q)$ et $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=(\overrightarrow{v},\overrightarrow{i})+(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u})=p-q$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}=||\overrightarrow{v}||||\overrightarrow{u}||\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=\cos(p-q)$.

On aussi $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}=\cos p\cos q+\sin p\sin q$.

D'où $\cos p\cos q+\sin p\sin q=\cos(p-q)$.mettre ici le cercle trigo avec les ingrédients. □

Exercice 27.

1. déduire de la formule (1) de l'application (26)

a) $\cos(-q)=\cos q$.

b) $\cos(\frac{\pi}{2}-q)=\sin q$.

c) $\cos(\pi-q)=-\cos q$.

d) $\sin(\frac{\pi}{2}-q)=\cos p$.

2. a) $\sin(-q)=-\sin q$. (Utiliser le b) et le c) de la question précédente).

b) Etablir les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}(1) & \cos(p+q)=\cos p\cos q-\sin p\sin q\\ (2) & \sin(p+q)=\sin p\cos q+\sin q\cos p\\ (3) & \sin(p-q)=\sin p\cos q-\sin q\cos p\end{array}$$

Exercice 28. Etablir les formules suivantes :

$$\cos 2p=\cos^2 p-\sin^2 p$$
$$\sin 2p=2\sin p\cos p$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

Exercice 29. Etant donné un triangle ABC de centre de gravité G, on désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$ et par O le centre du cercle circonscrit.

Soit H un point du plan.

1. Montrer que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= 3\overrightarrow{OG}\\ &= \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}\end{aligned}$$

2. Dans cette question, le point H désigne l'orthocentre du triangle ABC.

a) Déduire de la question précédente que $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

b) Démontrer de même que $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points O, G et H sont alignés.

Lorsque les trois points O, G et H ne sont pas confondues, la droite qu'ils définissent s'appelle *droite d'Euler du triangle ABC*

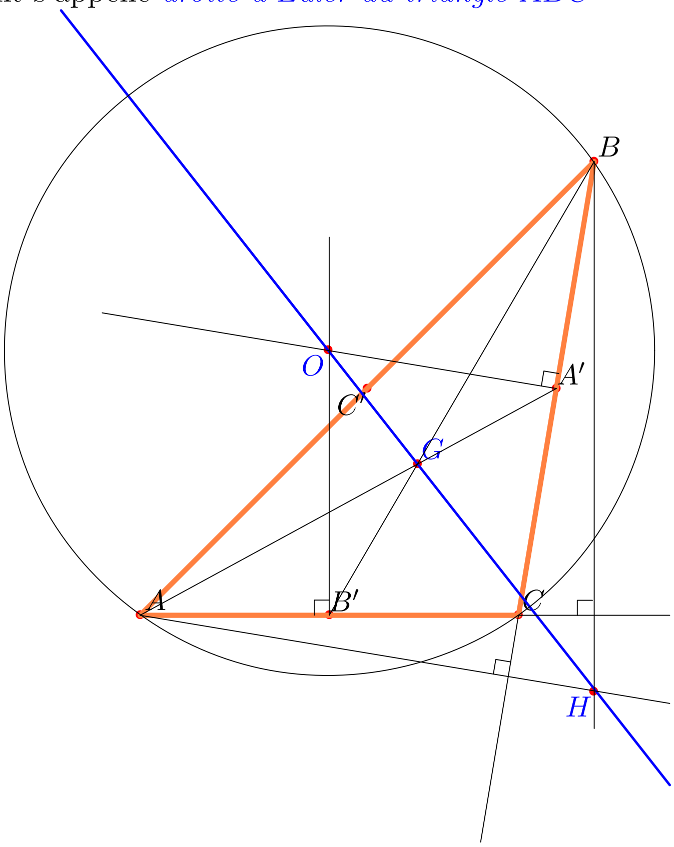


Table des matières